

**BANCO CENTRAL DE COSTA RICA
DIVISIÓN ECONÓMICA
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS
DIE-NT-01-2000
MARZO, 2000**

EL FILTRO BAXTER-KING, METODOLOGÍA Y APLICACIONES

Elaborado por:

Melania Flores Pizarro

**Documento de trabajo del Banco Central de Costa Rica, elaborado en el
Departamento de Investigaciones Económicas**

**Las ideas expresadas en este documento son responsabilidad de los autores y no necesariamente
representan la opinión del Banco Central de Costa Rica**

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
ASPECTOS TEÓRICOS.....	2
Funciones Periódicas.....	2
Filtros lineales.....	3
El filtro Baxter-King ($BK_{\kappa}(p,q)$).....	6
El filtro de Hodrick-Prescott ($HP(\lambda)$).....	8
APLICACIÓN DEL FILTRO BAXTER-KING.....	11
El programa.....	11
Aplicación del Filtro a Series Económicas.....	13
CONCLUSIONES.....	18
BIBLIOGRAFÍA.....	21
ANEXOS	

El Filtro Baxter-King, Metodología y Aplicaciones¹

Resumen

La presente nota tiene como objetivo exponer de manera breve la metodología del filtro Baxter-King como herramienta útil para el análisis de ciclos económicos y de extracción de tendencia. También se repasan las propiedades matemáticas del filtro Hodrick-Prescott, para comprender en qué aspectos difiere del Baxter-King. Como aplicación del filtro, se analizan series con periodicidad mensual (IMAE, IPPI, Base Monetaria) trimestral (PIB) y anual (PIB e Importaciones) y se concluye que a pesar de que no difieren mucho sus resultados, el segundo es superior al Hodrick-Prescott por cuanto permite que el investigador determine el tipo de información que desea aislar de las series.

Abstract

This document briefly explains the Baxter-King's filter methodology, which has become a very useful tool to analyze economic cycles and as a method for trend extraction. Some mathematic properties of Hodrick-Prescott filter are also reviewed, in order to understand the difference between this method and Baxter-King's. I applied the filter to monthly, quarterly and annual series. Although Baxter-King and Hodrick-Prescott filters do not differ much in their results, the former has the advantage that it allows the researcher to specify the kind of information she wants to isolate from the series.

INTRODUCCIÓN

La presente nota tiene como objetivo exponer de manera breve la metodología del filtro Baxter-King ($BK_k(p, q)$) como herramienta útil para el análisis de ciclos económicos y de extracción de tendencia. Dicho estudio responde a la necesidad de actualizar los métodos de extracción de tendencia, por cuanto se ha mencionado en reiteradas ocasiones que el filtro Hodrick-Prescott ($HP(\lambda)$), frecuentemente utilizado para este fin, presenta algunos inconvenientes metodológicos. Por otra parte, la División Económica del Banco Central de Costa Rica ya utiliza el filtro Baxter-King como instrumento de análisis, pero aún no se han estudiado a fondo cuáles son sus propiedades y qué elementos lo diferencian de otros filtros ya utilizados con anterioridad.

El estudio está dividido en dos apartados. En el primero, se revisan brevemente los aspectos teóricos necesarios para comprender cómo está construido el filtro Baxter-King y qué lo diferencia de otros, especialmente del filtro Hodrick-Prescott. Por ello, se repasan las funciones periódicas, los filtros lineales en general, así como la base matemática del filtro Baxter-King y Hodrick-Prescott. Si el lector está interesado específicamente en el aprendizaje de la técnica o si desea estudiar su empleo en la práctica, puede avanzar directamente al segundo apartado, en donde se realiza la aplicación del filtro

¹ Se agradecen los comentarios de la Licda. Ana Georgina Azofeifa, la ME. Evelyn Muñoz y las recomendaciones de la MSc Ana Cecilia Kikut en la etapa inicial de esta nota.

Baxter-King a diversas series económicas con periodicidad mensual, trimestral y anual y se comparan los resultados con los que se obtienen con el de Hodrick-Prescott.

ASPECTOS TEÓRICOS

*Funciones Periódicas*²

Para estudiar los ciclos de las series, se utiliza el análisis de dominio de frecuencia (Frequency Domain Analysis)³. Este subtópico del análisis de series de tiempo estudia el aporte que hacen componentes periódicos, regulares o no, en las series económicas. La idea subyacente es la siguiente: si una serie de tiempo presenta de alguna manera un comportamiento cíclico, es posible realizar una aproximación de la misma mediante funciones trigonométricas. A las series trigonométricas que aproximan una función cíclica o periódica se les denomina series de Fourier⁴.

Una función periódica tiene la característica de que $F(x+p)=F(x)$, con $p \neq 0$, p conocido como el período de la función. En el caso de las funciones seno y coseno, $p=2\pi$.

Cualquier función periódica puede expresarse en términos de funciones trigonométricas sustituyendo a x en $F(x)$ por $x=p(l/2\pi)$, por lo que si l aumenta en 2π , el valor de la función será igual a p . Es decir, la cantidad de tiempo (o el periodo p) que le toma a la función completar un ciclo es igual a $(2\pi/l)$. A l se le conoce como la frecuencia de la función y se mide en radianes.

Si bien es cierto que la frecuencia se mide en radianes, en ocasiones es más sencillo interpretarla cuando se expresa como proporción de p . Si se normaliza la frecuencia y se le convierte en fracción de p , el período estaría determinado por $2/w$, en donde la frecuencia normalizada será $w=1/p$.

De lo anterior se desprende que existe una relación inversa entre la frecuencia y el período. Entre menor sea la frecuencia, mayor será la cantidad de períodos que abarque un ciclo. Entonces, si la frecuencia tiende a cero, el período tiende a infinito, y si $w=1$, el período abarca dos intervalos de tiempo.

² Se agradecen los comentarios del MsC Federico Torres, Director de la Escuela de Informática en la Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología (ULACIT), en este apartado.

³ Esta teoría también abarca el análisis espectral y la desestacionalización de series semanales.

⁴ Para mayor detalle sobre las series periódicas y de Fourier, consúltese bibliografía sobre Cálculo y Ecuaciones Diferenciales.

Un ejemplo de una función periódica es la función coseno, $(F(x) = \cos x)$, en donde el ángulo x se mide en radianes, los cuales completan un círculo cuando alcanzan un valor de 2π . El patrón del coseno es cíclico y periódico, por lo que $F(x)$ termina su período, cuando x se acerca a 2π . Esta función es de especial importancia por su versatilidad matemática, y en especial, por cuanto $\cos(0)=1$, lo cual es una propiedad deseable en términos de aproximación de las series de tiempo⁵.

Filtros lineales

Para definir un ciclo, es necesario que el investigador suponga que una serie de tiempo determinada está compuesta por al menos dos componentes: uno de tendencia y otro cíclico⁶. El componente cíclico se determina, normalmente, de manera residual.

Una metodología frecuentemente utilizada para estimar el componente tendencial de la serie, es mediante el uso de **promedios móviles**, que hacen depender cada valor y_t de sus valores pasados (promedios móviles simples) o pasados y futuros (promedios móviles centrados), suavizando con este procedimiento la serie en cuestión. Para tomar en cuenta la idea intuitiva de que los valores más cercanos a la serie deberían tener un mayor peso en la determinación de una variable, se pondera mediante diversos métodos cada rezago o adelanto, de modo que la suma de dichos coeficientes sea igual a uno⁷.

En general, las series económicas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$y_t = y_t^s + y_t^c, \quad (1)$$

donde el primero es el componente tendencial y el segundo es el componente cíclico. Tal y como se mencionó, y_t^s se define a su vez como un promedio móvil de forma

$$y_t^s = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j y_{t-j} \quad (2)$$

⁵ Esto implica que el filtro será exactamente igual al ideal (o teórico) si π tiende a infinito. Matemáticamente, el filtro tendrá amplitud unitaria a la frecuencia de cero. Véase King y Rebelo (91), pág. 217. Para observar las diferencias gráficas entre filtros teóricos y filtros aproximados, véanse las figuras 2 y 3 contenidas en el anexo de Baxter y King (95).

⁶ Véanse, por ejemplo, Muñoz y Kikut (1994) y King y Rebelo (1991).

⁷ El filtro Hodrick-Prescott y el Baxter-King teóricos, realizan el cálculo de dichas ponderaciones mediante la transformación inversa de Fourier.

La sumatoria puede expresarse con el operador de rezagos, $B^n y_t = y_{t-n}$ por lo que la ecuación (2) se reescribe como sigue.

$$y_t^g = G(B) y_t \quad (3)$$

A $G(B)$ se le conoce también como un filtro lineal⁸. Si la parte cíclica resulta de restar la tendencia de la serie original, ésta será necesariamente un promedio móvil también y se denomina como $C(B) y_t \equiv [1-G(B)]y_t$.

El método matemático utilizado para ponderar los rezagos del promedio móvil se denomina **Transformación de Fourier**, la cual tiene la siguiente forma general:

$$\tilde{G}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j e^{-ij\lambda} \quad (4)$$

donde λ es la frecuencia, e i el número imaginario $\sqrt{-1}$. Matemáticamente se ha demostrado que cuando los filtros poseen la característica de ser simétricos ($g_j = g_{-j}$), la ecuación (4) se convierte en

$$\tilde{G}(\lambda) = g_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} g_j \cos(j\lambda) \quad (5)$$

por cuanto $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$. Es por esta razón que las propiedades de los cosenos serán útiles para explicar las características inherentes a la serie de tiempo, lo cual facilita el análisis de las mismas.

Cuando se filtra una serie se pueden generar dos tipos de distorsiones, una relacionada con un aumento en la amplitud de las ondas (conocida en inglés como “*gain*”) y la segunda consiste en un desplazamiento sobre el eje temporal de las series, por lo que los ciclos se mueven hacia la derecha o izquierda del ciclo original (a este se le conoce como movimiento de fase, en inglés, “*phase shift*”). King y Rebelo muestran matemáticamente que con filtros simétricos el desplazamiento temporal no se presenta^{9,10}.

⁸ Baxter y King (1995) definen como filtro lineal a la construcción de promedios móviles que aísla los componentes periódicos de una serie de tiempo económica que se hallan en una banda específica de frecuencias.

⁹ Véase King y Rebelo (1991) pág. 215.

¹⁰ Sin embargo, si el investigador lo desea, también se le puede inducir a la serie un movimiento de fase agregando un parámetro a la función con el objetivo de poder variar la posición de la misma, a lo largo del tiempo. Véase Harvey (1993), pág. 170.

Un filtro para ciclos económicos consiste, pues, en un filtro lineal, del tipo definido en las ecuaciones (3) a (5), que elimina componentes con frecuencias muy lentas (tendencia) y con frecuencias muy altas (irregular o estacional) y retiene los movimientos intermedios.

Según Baxter y King, un método óptimo de extracción de ciclos económicos debe cumplir con 6 objetivos¹¹:

- El filtro debe extraer un rango específico de periodicidades, sin variar sus propiedades inherentes (la varianza, correlaciones y otras medidas exploratorias de los datos).
- No debe producir un movimiento de fase (es decir, que no altere las relaciones temporales de las series a ninguna frecuencia). Este aspecto y el anterior definen un promedio móvil ideal, con ponderaciones simétricas para rezagos y adelantos.
- El método debe ser una aproximación óptima de un filtro ideal. Esto se puede determinar midiendo la diferencia de los resultados obtenidos con un filtro ideal y uno aproximado.
- La aplicación de un filtro debe producir una serie de tiempo estacionaria cuando se aplica a cifras que presentan tendencia.
- El método debe ser independiente de la longitud de la serie.
- El método debe ser operacional, esto es, de fácil aplicación y uso.

Los requisitos para el filtro ideal conllevan el establecer un equilibrio entre el estimar un filtro óptimo, lo cual implica agregar la mayor cantidad de rezagos y adelantos como explicativos de una variable y el perder observaciones al inicio y al final del período, lo cual reduce la cantidad de datos para el análisis. Los autores recomiendan utilizar como mínimo 6 años cuando se trabaja con datos trimestrales y anuales¹².

En la actualidad existen dos filtros lineales de amplio uso en los estudios económicos: el filtro Baxter-King y el filtro Hodrick-Prescott. Para comprender mejor las características y diferencias de ambos filtros, en las siguientes secciones se presentará un breve repaso de las propiedades matemáticas de los mismos y posteriormente se compararán los resultados estadísticos derivados de la aplicación de estas técnicas.

¹¹ Baxter y King (1995), pág.3

¹² Por las características de su estudio, los autores no hacen referencia a series mensuales.

El filtro Baxter-King ($BK_k(p,q)$)

Baxter y King realizan una crítica a los analistas de ciclos económicos en el sentido de que cuando se estiman metodologías de cálculo de los ciclos, frecuentemente han dejado de lado las características propias de los mismos. Por ello, su objetivo es encontrar un método útil para medir ciclos económicos y que éste sea óptimo, i.e. que cumpla con las especificaciones sobre ciclos asignadas por el investigador. Su procedimiento se resume en dos pasos: primero se mide el ciclo, para lo cual el investigador debe especificar ciertas características del mismo¹³ y posteriormente se le aísla, aplicando promedios móviles a los datos.

En su documento, Baxter y King desarrollan 3 tipos de filtro lineal: “low-pass”, “high-pass” y “band-pass”.

Intuitivamente, un filtro de tipo “low-pass” sólo retendrá los componentes que se mueven lento en los datos, esto es, que se producen con frecuencias muy bajas, $\underline{w} \leq w \leq \bar{w}$, siendo \underline{w} un límite bajo de frecuencias. Por la relación inversa entre p y w , entre menor sea la frecuencia mayor va a ser la cantidad de períodos que abarca un ciclo. Un filtro “low-pass” se representa como $LP_k(p)$, en donde k es el número de rezagos de los promedios móviles y p la periodicidad mínima aceptable en el filtro.

Un filtro de tipo “high-pass” ($HP_k(p)$) va a aceptar componentes de los datos cuya periodicidad es menor o igual a p . Esto equivale a una frecuencia relativamente alta, por lo que se espera que incluya elementos más frecuentes de la serie, como los irregulares o estacionales.

El filtro band-pass ($BP_k(p, q)$, que para efectos de esta nota se representará como $BK_k(p,q)$, en donde p y q son los períodos mínimo y máximo a incluir en el ciclo) es un tipo de construcción de promedios móviles que aísla los componentes periódicos de una serie de tiempo económica que cae en una banda de frecuencias específica. Por ello, será una combinación de dos filtros low-pass, recibiendo en su rango sólo frecuencias entre $\underline{w}_1 \leq w \leq \bar{w}_2$.

La representación general del filtro es la siguiente $b(B) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h B^h$, en donde B es el operador de rezagos, y b_h son los ponderadores de promedios móviles infinitos. Dichos ponderadores, a su vez, se obtienen mediante la transformación inversa de Fourier:

¹³ Este es precisamente uno de los aportes más importantes del estudio, por cuanto es el investigador quien, de acuerdo con las características propias de su economía, define qué tipo de movimientos se toman como ciclos y cuáles no.

$$b_h = \int_{-p}^p \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw \quad (6)$$

en donde $\mathbf{b}(w)$ es la ponderación ideal del filtro infinito.

Resolviendo la integral en (6) y aplicando algunas identidades matemáticas, se obtiene que $b_0 = w/p$, y $b_h = \text{sen}(hw)/hp$ ¹⁴.

En vista de que el proceso de medias móviles subyacente al filtro es de orden infinito, la aplicación a series finitas implica que debe hacerse alguna modificación, ya sea en el modelo o en los datos. Por ello, la representación finita relevante será del tipo:

$$a(B) = \sum_{h=-k}^k a_h B^h \quad (7)$$

en donde las a_h son las ponderaciones muestrales del filtro. La transformación de Fourier útil para encontrarlas será:

$$\mathbf{a}_k(w) = \sum_{h=-k}^k a_h e^{-iwh} \quad (8)$$

en donde $\mathbf{a}(w)$ es la ponderación ideal muestral del filtro.

A diferencia de la metodología de Hodrick y Prescott, que se verá más adelante, estos autores proceden a suponer que cuando se aproxima un filtro, debe buscarse aquel que minimice la discrepancia entre los ponderadores del filtro ideal y el filtro estimado, utilizando la siguiente expresión:

$$Q = \int_{-p}^p |\mathbf{d}(w)|^2 dw \quad (9)$$

en donde $\mathbf{d}(w) \equiv \mathbf{b}(w) - \mathbf{a}_k(w)$, es la discrepancia producida por la estimación de los ponderadores en la frecuencia ω , y k el número de rezagos seleccionado.

Luego de minimizar la ecuación, se puede observar que una manera sencilla de reducir la discrepancia de la función es el truncar los ponderadores ideales infinitos en el rezago k . Con ello, el

¹⁴ La solución de la ecuación se encuentra en Baxter y King (1995), apéndice B.

filtro estimará ponderaciones finitas iguales a las infinitas hasta el rezago κ , e igualará a cero todas las ponderaciones finitas cuando el número de rezagos sea mayor o igual a $\kappa+1$. Las ponderaciones se estiman igualmente mediante la transformación inversa de Fourier.

La cantidad de rezagos a incluir en el filtro es muy importante, por cuanto estos definen la precisión de los ponderadores. De acuerdo con Baxter y King, no existe un número ideal de rezagos, pero sí ocurre que entre más rezagos se incorporen en el promedio móvil, mejor será la aproximación con el filtro ideal, a costa de una mayor pérdida de datos por encima y por debajo del valor de interés, aspecto que cobra mayor importancia al final de la serie. Por ello, la escogencia de k dependerá en gran medida de la cantidad de datos disponibles y de lo necesario que sea aproximar el filtro al ideal¹⁵.

Siguiendo el análisis de las características ideales planteadas por Baxter y King, este filtro cumple con la mayoría de ellas: es simétrico, por lo que no produce movimientos de fase, aproxima relativamente bien un filtro ideal, produce series estacionarias, y es un método operacional. Además, es superior a otros en la medida que permite introducir la definición del investigador del ciclo económico y no produce variación en las propiedades de la variable al final de las series. Sin embargo, habrá una pérdida de datos al inicio y al final de la serie igual a dos veces la cantidad de rezagos que el investigador incluya¹⁶. Estas características se contrastarán en la sección de aplicación del filtro.

El filtro de Hodrick-Prescott (HP(I))

Partiendo del supuesto de que la serie está compuesta por un componente tendencial más un componente cíclico, Hodrick y Prescott encuentran la tendencia de la serie, minimizando la siguiente expresión¹⁷.

$$\text{Min}_{\{y_t^g\}_{t=1}^T} \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t^c)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(y_t^g - y_{t-1}^g) - (y_{t-1}^g - y_{t-2}^g)]^2 \right\} \quad (10)$$

¹⁵ Existen dos tipos de efectos que se relacionan con la inclusión de más o menos rezagos en la aproximación de un filtro ideal. Uno se define como el "leakage" (escape), que se refiere a los casos en los que el filtro incluye elementos que debería omitir y la otra como "compression", en donde ocurre que se omiten elementos que deberían incluirse. Conforme se agregan rezagos, los dos elementos se reducen sustancialmente.

¹⁶ Para resolver esta desventaja, la aplicación práctica crea variables artificiales de tipo autorregresivo al inicio y al final de la serie.

¹⁷ Véase Hodrick y Prescott (1997), pág.3

Según el análisis realizado por Muñoz y Kikut (1994), el primer término da idea del grado de ajuste de las series, por cuanto mide la suma de las desviaciones al cuadrado de la serie original respecto de la tendencia. El segundo componente posee un parámetro positivo, λ , que multiplica al crecimiento de la variación del componente tendencial. Entre más pequeño sea λ , la tendencia será más suave: si el parámetro es cero, la tendencia será igual a la serie original y por ende, el componente cíclico será cero. Por el contrario, si λ tiende a infinito, la tendencia se compara con la línea recta de los mínimos cuadrados ordinarios y por ello, la ciclicidad de la serie es máxima.

Resolviendo el problema de minimización y reacomodando la condición de primer orden, el componente cíclico de la función tiene la siguiente forma:

$$C(B) = \frac{I[1-B]^2[1-B^{-1}]^2}{1+I[1-B]^2[1-B^{-1}]^2} \quad (11)$$

utilizando la transformación de Fourier, es posible escribir el ciclo de la siguiente forma:

$$\tilde{C}(w) = \frac{4I[1-\cos(w)]^2}{1+4I[1-\cos(w)]^2} \quad (12)$$

King y Rebelo obtuvieron la expresión del componente tendencial en términos de promedios móviles, con lo que comprobaron que la tendencia es un promedio móvil centrado, cuyas ponderaciones son de orden infinito¹⁸.

Esto implica que el filtro HP teórico posee una serie de características ideales según los criterios de Baxter y King que fueron mencionados arriba:

- Como el filtro es simétrico, no produce movimientos de fase.
- Aproxima bien a un filtro ideal cuando se utiliza un $\lambda=1600$ para datos trimestrales. Los autores comprueban que los resultados estadísticos más o menos equivalen a utilizar un filtro de tipo **HP_k(32)**.
- Produce series estacionarias, cuando éstas están integradas hasta el orden cuarto.
- El método es operacional.

¹⁸ Baxter y King (1995), pie de página no. 9, pág. 15. Esta es la razón por la cual se puede comparar el filtro de Hodrick y Prescott con las propiedades ideales de un filtro lineal de tipo **HP_k(p)**.

Sin embargo, la aplicación práctica del filtro $HP(\lambda)$ adolece de algunos problemas. Al igual que el filtro $BK_k(p, q)$, el proceso de medias móviles subyacente es de orden infinito, por lo que su aplicación a series finitas implica que debe hacerse alguna modificación en el modelo o los datos. Hodrick y Prescott suponen que la tendencia y el ciclo óptimos son procesos de ruido blanco independientes con un modelo de probabilidad, dinámica y varianzas conocidas. Ello equivale a afirmar que las estimaciones son promedios ponderados de los datos originales y en notación se escribe

$$y_t^c = \sum_{h=1}^T d_{ht} y_h \quad (13)$$

en donde, d_{ht} es la ponderación que tendrá cada valor en la estimación de y_t^c .

Esta metodología presenta el inconveniente de que las ponderaciones van a depender del tiempo, por lo que el filtro dejará de ser independiente del largo de la serie. Además, por construcción el filtro no perderá ningún dato al inicio o al final de la serie, lo cual es muy atractivo para los investigadores, pues contarán con una serie más extensa para el análisis. Sin embargo, Baxter y King demostraron que las propiedades de la serie filtrada en puntos iniciales y finales es significativamente distinta de un filtro ideal, no así en los valores intermedios de la misma.

Otro aspecto negativo se relaciona con la elección un tanto arbitraria del parámetro λ ¹⁹. El análisis de Baxter y King les llevó a concluir que el filtro $HP(\lambda)$ con $\lambda = 1600$ para datos trimestrales aproxima muy bien el comportamiento de un filtro teórico de tipo “high-pass” $HP_k(32)$. Sin embargo, para datos con periodicidad anual, se comprobó empíricamente que el filtro $HP(\lambda)$ es una mala aproximación de un filtro ideal, por cuanto incluye comportamientos cíclicos que debería omitir y viceversa (véase nota al pie no.15).

Además, King y Rebelo sostienen que la aplicación mecánica del filtro puede alterar las propiedades inherentes a la misma, es decir, sus medidas exploratorias tales como su volatilidad y comovimiento con otras series²⁰. Sin embargo, el efecto de esta alteración en los momentos estadísticos no es constante en las series que analizaron dichos autores.

¹⁹ Véase Muñoz y Kikut (1994), pág. 19, Baxter y King (1995), pág 21

²⁰ Por volatilidad y comovimiento se entienden la desviación estándar de la serie y la correlación de esta con otras series económicas.

APLICACIÓN DEL FILTRO BAXTER-KING

El programa

Baxter y King realizaron su programa en el paquete MATLAB. Stock y Watson lo trasladaron a GAUSS, y Alan Taylor realizó una adaptación del mismo a WINRATS²¹. Esta adaptación consiste en dos programas básicos: `bpfilter.src`, `bpdemo.prg`, además de un archivo de datos con extensión `rtd`. El Equipo de Modelación Macroeconómica del Banco Central de Costa Rica, con la asesoría del Dr. Alexander Hoffmaister, modificó el programa ejecutor para facilitar su aplicación. De esta forma, es posible utilizar un archivo de datos elaborado directamente en Excel²². Es importante recordar que los datos deben salvarse como Hoja de Excel 4.0.

Previo a una descripción breve del programa, es importante mencionar un aspecto en cuanto a las cifras que se pierden con la aplicación del filtro. Se recordará que en el apartado de aspectos teóricos se menciona que el filtro $BK_k(p, q)$ utiliza promedios móviles truncados en el rezago k para aproximar un filtro ideal. Esto implica la pérdida de datos al inicio y al final de la serie en el monto de k valores. Este aspecto es una limitación importante si se utiliza el filtro con fines de interpretación de los últimos valores de la tendencia y/o pronóstico. Por ello, la aplicación práctica del filtro en WINRATS extiende las series filtradas al inicio y al final, con el fin de evitar la pérdida de datos. Dicha extrapolación se realiza suponiendo un comportamiento autorregresivo en la serie de tiempo correspondiente, en la cantidad de términos autorregresivos que indique el investigador. Con este procedimiento se evita la pérdida de datos, lo cual es de suma importancia al final de la serie. Sin embargo, debe tenerse presente la limitante es que las últimas k cifras de la tendencia o ciclo que se estudien no será producto del filtro, sino más bien del comportamiento autorregresivo de las series.

El programa que se encarga de ejecutar el filtro se denomina, **bk1.prg**. En éste se indican, entre otros, la fecha de inicio y periodicidad de la serie, el archivo de origen de los datos, las transformaciones de los mismos y el archivo que aloja el comando del filtro. Los comandos restantes se encargan de realizar una transformación logarítmica a los datos, ejecutar el filtro, obtener la tendencia por resta y posteriormente convertir los resultados de logaritmos a series originales. Es muy importante modificar en este programa las opciones del comando **@bpfilter** correspondientes a los límites superior, inferior, promedios móviles y parámetros autorregresivos para sustituir los valores

²¹ El programa se obtuvo de la página de internet www.estima.com.

²² Para comprender mejor los procedimientos y comandos del WINRATS, consúltese el DIE-NT-02-99.

que se pierden al inicio y final de la serie. Se recomienda utilizar los siguientes valores de parámetros:

Series anuales	upper =2	lower =8	nma =3	arpad =1
Series trimestrales	upper =2	lower =32	nma =12	arpad =4
Series mensuales	upper =2	lower =96	nma =12	arpad =12

Donde

Upper: número de períodos mínimos que se incluirán en el filtro, correspondientes a frecuencias altas.

Lower: número de períodos máximos que se incluirán en el filtro, correspondientes a frecuencias bajas.

Nma: número de promedios móviles (o rezagos) del filtro.

Arpad: número de parámetros autorregresivos que se utilizarán para sustituir los valores que se pierden al final de la serie, por la aplicación de un promedio móvil truncado.

En el caso de las series anuales y trimestrales, la idea planteada por Baxter y King es mantener aproximadamente la misma periodicidad en la explicación de la información. Por su parte, la definición de ciclo más común, en la que se basan tanto Hodrick y Prescott como Baxter y King, se apoya en la investigación de Burns y Mitchell, quienes definen como ciclos aquellos componentes con periodicidad no menor a 6 trimestres de duración, pero menores a 32 trimestres (entre año y medio, y 8 años)²³. Sin embargo, es importante acotar que el investigador será quien deberá decidir cuáles son los valores adecuados a utilizar en el filtro, dependiendo de los fines para los cuales se use. En cuanto a las series con periodicidad mensual, no se respetará el supuesto de Baxter y King de mantener una misma periodicidad para explicar las series, por razones que se mencionarán más adelante.

El procedimiento del programa **bpfilter.src** se divide en dos grandes apartados, uno para crear variables artificiales al inicio y al final de las series y el filtro propiamente dicho. En el primer apartado se definen los comandos necesarios para crear variables artificiales al inicio y al final de la serie mediante términos autorregresivos. En la segunda parte, se ejecuta el filtro propiamente dicho, por lo que para fines del programa, lo importante es conocer el tipo de ciclo que el investigador estima que se presenta en sus datos.

Los resultados del programa se alojarán en la hoja que el usuario asigne como **output** en el WINRATS y la salida contendrá la fecha, serie original y tendencia, todo en niveles originales. En este punto es importante resaltar que lo que se obtiene como resultado de la aplicación del filtro será

²³ Véase Baxter y King (95), pág. 3.

el ciclo de la serie. Si lo que se desea es obtener la tendencia, tal y como lo es en este caso, se calcula dentro del mismo programa restándole a la serie original el valor del ciclo en cada punto. En el Anexo no.1 se puede apreciar el programa ejecutor **bk1.prg**.

Con el fin de analizar el comportamiento del filtro en diversas series económicas y comprobar los resultados enunciados por Baxter y King, se utilizarán series económicas de Costa Rica con periodicidad mensual, trimestral y anual. Las series mensuales por analizar serán el Índice Mensual de Actividad Económica (IMAE), la Base Monetaria y el Índice de Precios al Productor Industrial (IPPI), la trimestral será el Producto Interno Bruto real (PIB) y las anuales serán las importaciones y el PIB real.

Aplicación del Filtro a Series Económicas

Tal y como se mencionó, se utilizaron tres series mensuales, la Base Monetaria, el IMAE y el IPPI en series originales. Las primeras dos variables se caracterizan por contener alta estacionalidad y elementos irregulares, en tanto que el IPPI posee un comportamiento más estable.

Las tres series abarcan distintos intervalos de tiempo. Sin embargo, con fines comparativos se estandarizó el período de enero de 1991 a setiembre de 1999. El acortar las series produce resultados estadísticamente distintos, como lo demuestra el caso del IMAE, en donde al comparar los valores resultantes de iniciar en dos períodos distintos, a saber, 1976 y 1991, la prueba t de igualdad de series proporcionó un valor de -4.34 , con lo que se rechaza la hipótesis nula que implica que los valores de tendencia obtenidos para una misma serie con intervalos de tiempo distintos, son estadísticamente diferentes²⁴. Sin embargo, esta diferencia se produce exclusivamente en los valores iniciales y finales que fueron obtenidos determinando una función autorregresiva. Es de esperar, entonces, que los resultados difieran en los extremos. En los valores centrales de la nueva serie, los coeficientes son exactamente iguales. Por ello, y para poder ganar comparación entre las tres variables mensuales a considerar, se utilizará un mismo período para las tres.

Otro aspecto a considerar en las series mensuales se relaciona con la cantidad de rezagos por incluir. De acuerdo con Baxter y King, para datos anuales se utilizan 3 rezagos y para cifras trimestrales 12, por lo que la idea implícita es utilizar los promedios móviles con 3 años de historia. Esto implica que para cifras mensuales se deberían utilizar 36 rezagos. Esto no se considera conveniente por dos

²⁴ La prueba t de igualdad de series se calcula como sigue: $t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sqrt{n}}}$, donde Ho: las series son iguales en promedio.

razones, la principal, por cuanto estadísticamente los resultados no difieren cuando se utilizan 36 o 12 rezagos dada una muestra y la segunda, porque el programa deberá utilizar aproximaciones de los últimos 36 datos, lo cual no es deseable para fines de interpretación. Por esto se utilizarán 12 rezagos en los promedios móviles.

La última variante de importancia en la selección de un filtro consiste en la definición de ciclo que brinde el investigador. En series mensuales esta variante es de suma importancia, por cuanto en las mismas se presentan elementos de tipo estacional o irregular, no tan presentes en datos trimestrales y anuales. Por ello, el investigador deberá decidir cuál es el fin para el cual utilizará el filtro. Si su objetivo es obtener la tendencia, debe filtrar los elementos irregulares y estacionales, así como los cíclicos de la serie, por lo cual deberá utilizar una frecuencia máxima muy alta, lo que equivale a períodos muy bajos (por ejemplo, **upper =2**). Con esto, podrá obtener una tendencia suave y sin movimientos de tipo irregular o estacional. Si más bien lo que persigue es obtener una aproximación del ciclo, le convendrá filtrar los elementos irregulares y estacionales de modo que no “ensucien” el ciclo. Por ello, deberá determinar un período relativamente alto, por ejemplo, **upper=12**.

Para facilitar la comprensión de la importancia de seleccionar el límite de periodicidad superior, así como la escogencia del rezago a utilizar, en el Anexo No.2 se presentan los gráficos 1 a 3. Se tomará como punto de referencia la serie que fue filtrada definiendo ciclos que abarcan de 2 a 96 períodos, con 12 rezagos (definida en los gráficos como 2,96,12,12). La primera variante modifica el número de rezagos de referencia de 12 a 3 y la segunda modifica el límite superior de 2 a 12.

Los casos interesantes son la Base Monetaria y el IMAE, dada la estacionalidad que los caracteriza. En el caso del IPPI, las series se transponen, indicando una diferencia muy leve entre las variantes, por lo que se podría afirmar empíricamente, que las series que no poseen un comportamiento irregular o estacional, pueden utilizar cualquiera de las tres variantes del modelo anteponiendo, por supuesto, los objetivos del estudio y los criterios económicos del investigador. La situación no es la misma al considerar la Base Monetaria y el IMAE. En ambas, al reducir la cantidad de rezagos para el promedio móvil, se produce un comportamiento más suave, pero que aún es afectado por los movimientos estacionales de las mismas. Por otra parte, cuando lo que se altera es la periodicidad mínima a considerar como filtro, la serie tiende a parecerse más a la serie original y menos a la tendencia, con movimientos irregulares y estacionales muy marcados. En vista de esta conducta, en las tendencias por estudiar se filtrarán de las series los movimientos que se producen entre 2 y 96 períodos, utilizando 12 rezagos y 12 términos autorregresivos para extrapolar la serie (en notación de Baxter y King, será un **BK₁₂(2,96)**).

Una vez que se ha justificado la transformación por utilizar, se procederá a realizar un breve análisis exploratorio de la tendencia de las series, utilizando el filtro $BK_{\kappa}(p, q)$, y $HP(\lambda)$. En el Cuadro No.1 se pueden apreciar tres estadísticos específicos: la desviación estándar, la autocorrelación de primer orden, y el coeficiente de correlación de la Base Monetaria y el IPPI con respecto al IMAE, utilizando 3 y 12 rezagos para comparar los resultados. Los estadísticos presentados serán útiles para comprender en qué medida las series son afectadas por las transformaciones. En los gráficos No. 4 al 6, se muestra la serie original con las dos tendencias, la obtenida con el $HP(\lambda)$ y el $BK_{\kappa}(p, q)$ de referencia **$BK_{12}(2,96)$** .

Aunque no se presenta en el cuadro, es importante mencionar que si se calcula el promedio aritmético de las series a partir del momento en que las series filtradas cuentan con datos, es decir, utilizando la misma cantidad de observaciones tanto para la serie original como para las filtradas con 3 o 12 rezagos y con el filtro $HP(\lambda)$, el valor promedio será el mismo para todas las series. En este sentido, se cumple con el requisito de un filtro ideal de no variar las propiedades inherentes a los datos.

La desviación estándar brinda una idea de la volatilidad de las series. En los tres casos, este estadístico es mayor cuando se emplea el filtro de HP que cuando se utiliza el $BK_{\kappa}(p, q)$. Este resultado es esperado, por cuanto el filtro BK seleccionado se diseñó ajustando límites lo suficientemente amplios como para capturar los elementos irregulares de la serie, aspecto en el que el $HP(\lambda)$ no es flexible.

La autocorrelación de primer orden es mayor, en las tres series, para el caso del filtro $HP(\lambda)$ que para el $BK_{\kappa}(p, q)$, pero las tres presentan un valor mayor al 90%, con ambos filtros. La serie en la que existe una mayor diferencia entre los filtros, es la del IMAE, pero esta diferencia entre los valores de la autocorrelación no es mayor al 4%. Es interesante observar que el valor de la autocorrelación es prácticamente el mismo cuando se utilizan 3 y 12 rezagos con el filtro $BK_{\kappa}(p, q)$.

En cuanto a la correlación entre las variables Base Monetaria e IPPI con respecto a IMAE, se evidencia la presencia de una fuerte asociación entre ambas y el indicador de producción, utilizando ambos filtros, siendo el resultado de $HP(\lambda)$ más fuerte que el $BK_{\kappa}(p, q)$. En este último, se puede observar que la relación entre el IPPI y el IMAE disminuye en aproximadamente un 5% cuando se usan 3 rezagos y los valores son muy cercanos entre $HP(\lambda)$ y $BK_{\kappa}(p, q)$ al comparar los filtros con 12 rezagos. Este comportamiento también fue encontrado por Baxter y King en cifras trimestrales, aunque no fue uniforme en las series que estudiaron.

En cuanto a cifras trimestrales, se analizaron las cifras correspondientes al PIB. Al igual que con las series mensuales, se realizaron diversas pruebas con diferentes rezagos. En el gráfico No. 7 del anexo, se puede observar que las tendencias resultantes no difieren mucho entre sí, al utilizar 3, 6 y

Cuadro No.1
Estadísticos de Series Económicas
Transformadas con Filtro Baxter King y Hodrick y Prescott

	Rezago de Filtro B-K		Filtro H-P
	3	12	
Cifras mensuales			
Desviación Estandar ¹			
Base Monetaria	47757.334	47762.190	54280.301
IMAE	10.501	10.093	11.464
IPPI	52.564	52.349	56.196
Autocorrelación de primer orden ²			
Base Monetaria	0.956	0.956	0.968
IMAE	0.923	0.926	0.964
IPPI	0.952	0.952	0.974
Correlación con IMAE ¹			
Base Monetaria	0.959	0.989	0.996
IMAE	1.000	1.000	1.000
IPPI	0.899	0.957	0.978
Cifras Trimestrales			
Desviación Estandar			
PIB	686.21	676.24	680.28
Autocorrelación de primer orden			
PIB	0.961	0.963	0.967
Cifras Anuales			
Desviación Estandar			
PIB	2863.900	--	2844.203
Importaciones	460644.570	--	437703.442
Autocorrelación de primer orden			
PIB	0.844	--	0.855
Importaciones	0.787	--	0.834
Correlación con PIB			
PIB	1.000	--	1.000
Importaciones	0.951	--	0.978

¹ Calculados con el paquete Excel

² Calculada con el paquete WINRATS

12 rezagos. El gráfico No. 8 del Anexo muestra el comportamiento de la serie original, el $BK_{\kappa}(p, q)$ de orden $BK_{12}(2,32)$, y el $HP(\lambda)$.

En el análisis exploratorio se obtuvieron sólo dos estadísticos, la desviación estándar, y la autocorrelación de primer orden. En la medida de volatilidad destaca el efecto de utilizar más o menos rezagos para comparar los resultados con el filtro $HP(\lambda)$. Si se incluyen menos rezagos en la serie, la volatilidad es la mayor en términos absolutos. Dicho comportamiento es consistente con el hecho de que al aumentar rezagos la serie se vuelve más suave. A pesar de esto, es importante notar que las diferencias entre los tres estadísticos son pequeñas.

En cuanto a la autocorrelación es evidente el mismo comportamiento que en el caso de variables mensuales, a saber, existe una alta dependencia del dato contemporáneo con el inmediatamente anterior, en los tres casos de poco más de 96%.

Por último, se presentan las cifras anuales del PIB y las Importaciones de bienes y servicios. La serie original y tendencias se muestran en los gráficos 9 y 10 del Anexo No. 2. En el caso anual, no se presentan las cifras con 12 rezagos por cuanto la serie que se obtuvo de la base de datos es muy corta (20 datos), por lo que se perderían casi todas las observaciones. De esto resulta que la desviación estándar con el filtro $HP(\lambda)$ es menor que con $BK_{\kappa}(p, q)$. Esto implicaría que el segundo filtro recoge más comportamientos que se presentan con mayor frecuencia que el primero.

En cuanto a la autocorrelación de primer orden y la correlación de las importaciones con el PIB, se evidencian correlaciones mayores cuando la serie se filtra con $HP(\lambda)$. Sin embargo, igual que en los casos anteriores, la diferencia mayor se encuentra en la autocorrelación de las importaciones, en donde la diferencia asciende a 0.047.

De los resultados anteriores se pueden obtener algunas conclusiones empíricas, como lo son que el filtro $HP(\lambda)$ es menos versátil en la identificación de los ciclos, por lo que verá afectada su capacidad para recoger o separar comportamientos de las series. En este sentido, el $BK_{\kappa}(p, q)$ es muy superior.

A pesar de la limitación anterior, no se observa una diferencia significativa entre los resultados proporcionados por ambos filtros. Dicho resultado se comprueba cuando se realiza una prueba t de igualdad de las tendencias, en donde se comparan las tendencias resultantes del filtro $BK_{\kappa}(p, q)$ utilizando 3 y 12 rezagos, con los resultados de las tendencias obtenidas con $HP(\lambda)$. Con excepción del PIB trimestral cuando se utilizan 12 rezagos, en donde se rechazó la hipótesis nula de igualdad de

series en promedio, las otras series mostraron valores de t tales que no se puede rechazar la hipótesis nula de igualdad de series. Dichos resultados se presentan en el Cuadro No.2 siguiente.

Cuadro No. 2
Prueba T de Igualdad de Tendencias
Filtradas con Baxter King y Hodrick Prescott

	Rezago de Filtro B-K	
	3	12
Cifras mensuales		
Base Monetaria	0.072	-0.418
IMAE	0.081	0.818
IPPI	0.047	-0.683
Cifras trimestrales		
PIB	-0.533	3.834
Cifras anuales		
PIB	-0.410	--
Importaciones	-0.306	--

Notas:

La hipótesis nula es $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Para calcular el T, se utiliza la fórmula

$$t_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sqrt{n}}}$$

CONCLUSIONES

- Las funciones periódicas se utilizan en economía para explicar los ciclos económicos y su estudio se enmarca dentro del Análisis de Dominio de Frecuencia. Baxter y King utilizan dicha metodología como base para construir su filtro.
- Con fines comparativos, el filtro Hodrick-Prescott ($HP(\lambda)$) es aproximadamente un filtro de este tipo, por lo que las propiedades matemáticas del mismo son equiparables con las del filtro Baxter-King ($BK_x(p, q)$).
- El filtro Baxter-King consiste en un método de extracción de ciclos de las series económicas, que se caracteriza por permitir al investigador definir el tipo de ciclo que presenta la variable que se analiza.

- El filtro Baxter-King cumple con la mayor parte de las características de un filtro ideal, en el sentido de que no varía las propiedades inherentes a los datos, produce series estacionarias, no ocasiona movimientos de fase y es operacional. Sin embargo, al utilizar promedios móviles centrados truncados en el rezago k , pierde k datos al inicio y al final de la muestra.
- En la aplicación práctica del filtro, lo que se obtiene directamente del filtro es el ciclo de la serie. Sin embargo, en el programa puede calcularse la tendencia, obteniéndola como un residuo entre la serie original y el ciclo.
- La metodología construida en el paquete WINRATS realiza una extensión de la serie con la ayuda de parámetros autorregresivos para evitar la pérdida de datos al final de la serie, por lo que los últimos k datos son producto de suponer que la serie de tiempo tendrá un comportamiento similar al de los períodos anteriores. Este elemento debe ser tomado en consideración a la hora de pronosticar e interpretar los resultados.
- Lo anterior también provoca que la serie sea sensible a la cantidad de muestra que se utiliza en los primeros y últimos k valores. En el resto de los datos intermedios los valores resultantes del filtro son iguales con una mayor o menor muestra.
- El investigador deberá definir los límites mínimo y máximo del filtro, así como la cantidad de rezagos a utilizar, y los parámetros autorregresivos que se utilizarán para sustituir los datos que se pierden al final de la serie. Con esto, el filtro se convierte en una herramienta poderosa y versátil, muy superior a otros filtros lineales que son inflexibles a las características propias de la economía.
- Es importante recordar que las decisiones que tome el investigador sobre los parámetros van a depender de los objetivos de su investigación y de su criterio de experto sobre la serie de tiempo por analizar. La definición del ciclo debe depender, pues, de ambos aspectos.
- En este sentido, la selección de la cantidad de rezagos es importante, especialmente para series con periodicidad mensual, por cuanto estas se ven afectadas por comportamientos estacionales o irregulares que no serán suavizados con utilizar promedios móviles centrados muy cortos.
- Al realizar la comparación de los resultados de tendencias obtenidas con Baxter-King y Hodrick-Prescott, se encontró que no existe una diferencia estadísticamente significativa entre sus resultados, tanto al analizar tres medidas exploratorias como lo son la desviación estándar, autocorrelación de primer orden y correlación con el producto, como con la prueba estadística t

de igualdad de series. Sin embargo, la versatilidad del filtro Baxter-King lo convierte en una herramienta más moderna para el análisis de ciclos y tendencias que deba hacer un investigador.

BIBLIOGRAFÍA

Base de Datos SIEC, Banco Central de Costa Rica.

Baxter, M. and King, R. (1995) *Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*. NBER Working Paper Series. WP No. 5022. Cambridge, Massachusetts.

Harvey, A. (1993) *Time Series Models*. Second Edition, The MIT Press. Cambridge, Massachusetts.

Kikut, A y otros. (1999) *Guía práctica de uso del paquete WINRATS*. DIE-NT-02-99. Banco Central de Costa Rica.

King, R. and Rebelo, S. (1991) *Low Frequency Filtering and Real Business Cycles*. Journal of Economic Dynamics and Control Vol 17. Pp 207-231.

Manual del paquete Rats.

Monge, A. and Hall, L. (1999) *Aggregate fluctuations and co-movements in Central America and Mexico*. Taller Macroeconomic Interdependence in Central America and Mexico, presentado el 27 de abril de 1999, en la Universidad de Costa Rica.

Muñoz, E. y Kikut, A. (1994) *El Filtro de Hodrick y Prescott: una técnica para la extracción de la tendencia de la serie*. DIE-NT-03-94/R. Banco Central de Costa Rica.

Página de Internet www.estima.com

Stock, J. and Watson, M. (1998) *Business Cycle Fluctuations in U.S. Macroeconomic Time Series*. NBER Working Paper Series. WP No. 6528. Cambridge, Massachusetts.

Ya-Lun Chou (1969) *Análisis Estadístico*. Primera Edición, Nueva Editorial Interamericana. México.

florespm@bccr.fi.cr

F:\...NOTAS TÉCNICAS\NT2000\NT-01-2000.DOC

ANEXOS

Anexo N°1

*FILTRO BAXTER KING
*ACTUALIZADO POR EL EQUIPO DE MODELACIÓN MACROECONÓMICA
*FECHA DE ACTUALIZACION: 09-02-2000

*

*PROGRAMA RATS: BK1.PRG

*

*

*LECTURA DE LA BASE DE DATOS

*-----

*

CALENDAR 1980 1 1

*

ALLOCATE 0 1999:01

*

OPEN DATA C:\WINRATS\BK-HPAN.XLS

*

DATA(FORMAT=XLS,ORG=OBS) / PIB MBYS

*

*

COMPUTE START = 1980:01

COMPUTE END = 1999:01

*

*GENERACION DE VARIABLES

*-----

*CIFRAS MENSUALES

*-----

*SET LBM /= LOG(BM)

*SET LIMAE /= LOG(IMAE)

*SET LIPPI /= LOG(IPPI)

*

*CIFRAS TRIMESTRALES

*-----

*SET LPIB /= LOG(PIB)

*

*CIFRAS ANUALES

*-----

SET LPIB /= LOG(PIB)

SET LMBYS /= LOG(MBYS)

*FILTRO DE BAXTER KING

*-----

*

* SOURCE(noecho) C:\winrats\BPFILTER.SRC

* @BPFILTER(UPPER=2,LOWER=8,NMA=3,ARPAD=1) LPIB / CLPIB

* @BPFILTER(UPPER=2,LOWER=8,NMA=3,ARPAD=1) LMBYS / CLMBYS

*

```
*
*****
*PRESENTACION DE LOS RESULTADOS
*-----
*PRINT / LPIB CLPIB

*SET TLPIB /= LPIB - CLPIB
*SET TPIB /= EXP(TLPIB)

*SET TLMBYS /= LMBYS - CLMBYS
*SET TMBYS /= EXP(TLMBYS)

PRINT / PIB MBYS TPIB TMBYS

HALT
*
```

Anexo N°2

Gráfico No.1

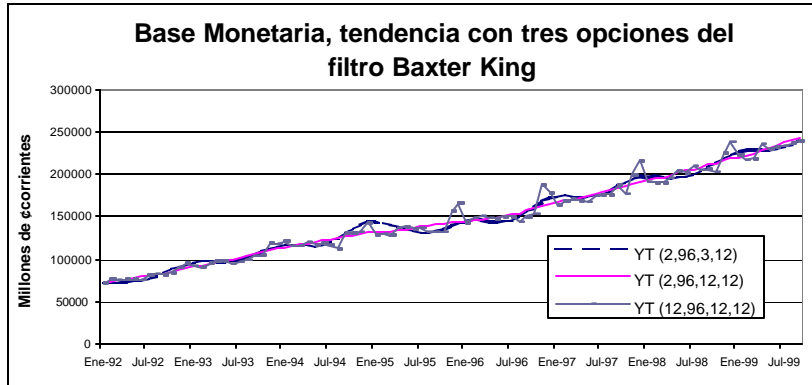


Gráfico No. 2

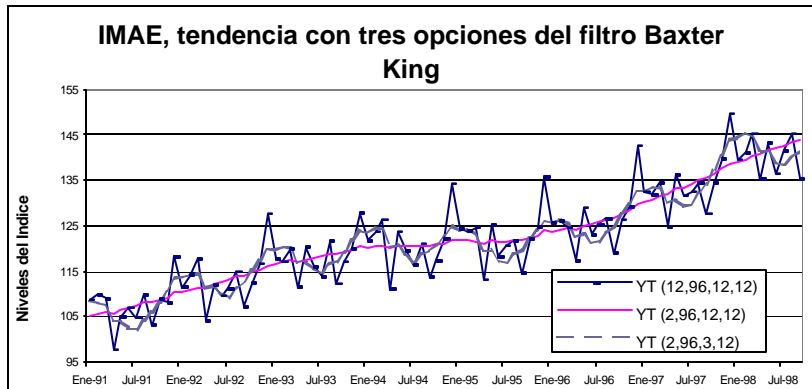


Gráfico No.3

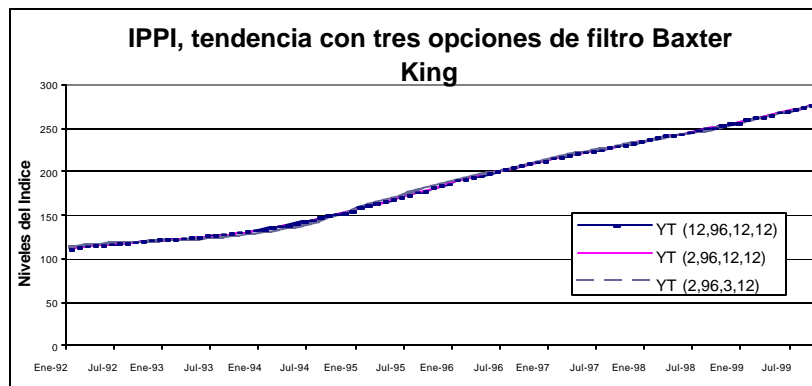


Gráfico No.4

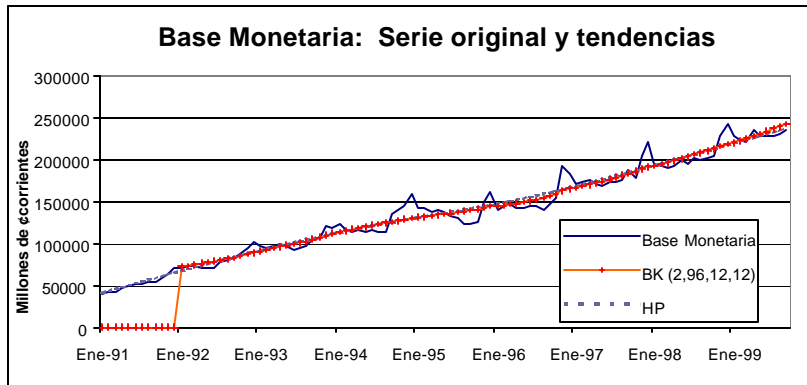


Gráfico No.5

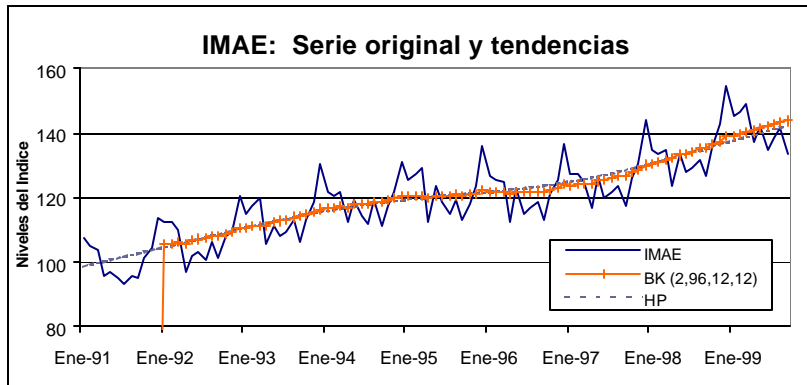


Gráfico No.6

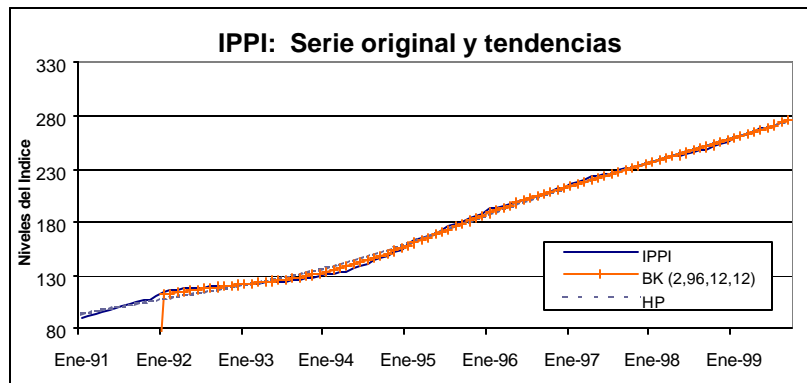


Gráfico No.7

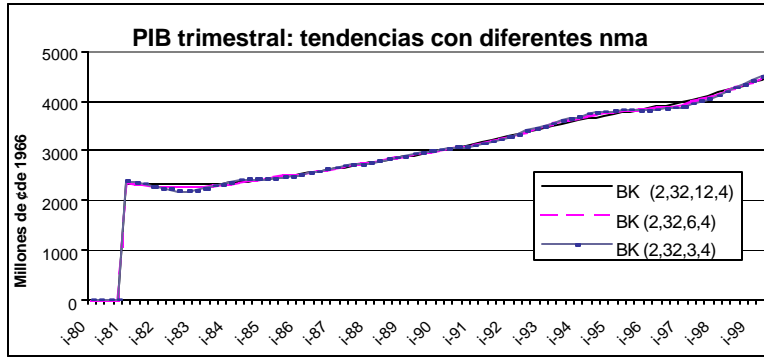


Gráfico No.8

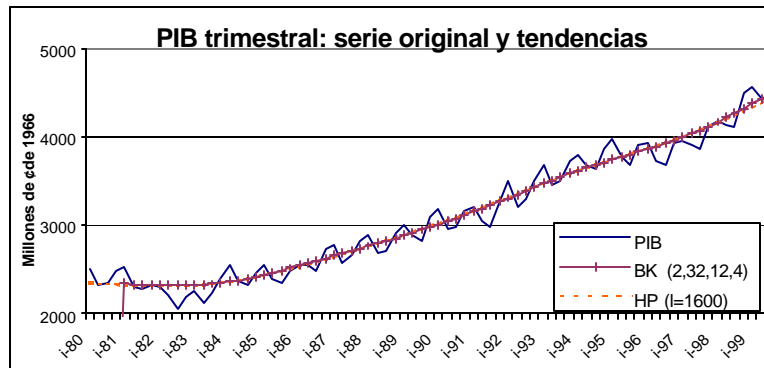


Gráfico No.9

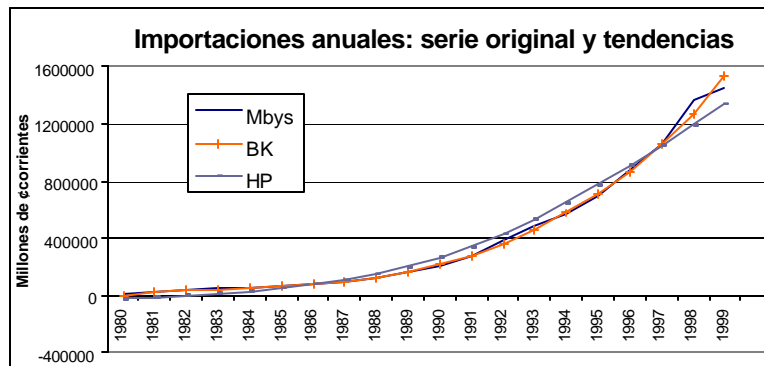
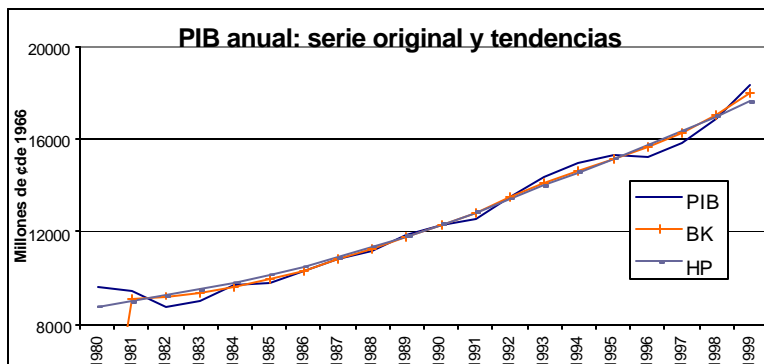


Gráfico No.10



**BANCO CENTRAL DE COSTA RICA
DIVISIÓN ECONÓMICA
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS
DIE-NT-02-2000
MARZO, 2000**

ANÁLISIS ESPECTRAL: CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y APLICABILIDAD

Elaborado por:

Diana González Gómez

Documento de trabajo del Banco Central de Costa Rica, elaborado en el
Departamento de Investigaciones Económicas

Las ideas expresadas en este documento son responsabilidad de los autores y no necesariamente
representan la opinión del Banco Central de Costa Rica

TABLA DE CONTENIDO

I.INTRODUCCIÓN.....	1
II.ANÁLISIS ESPECTRAL	2
2.1.El Caso Univariable	3
2.2.El Caso Bivariado o Análisis Espectral Cruzado	5
2.3.Ventajas y Desventajas del Análisis Espectral	6
III.EJEMPLO DE APLICACIÓN DE ANÁLISIS ESPECTRAL: PRONÓSTICO DE CORTO PLAZO DE LA EMISIÓN MONETARIA.....	7
3.1.Procedimiento y Resultados	7
3.2.Evaluación de la Capacidad de Pronóstico del Modelo.....	12
IV.CONSIDERACIONES FINALES	14
V.BIBLIOGRAFÍA.....	15
ANEXOS	
Anexo N°1	17
Anexo N°2	20
Anexo N°3	22

ANÁLISIS ESPECTRAL: CONSIDERACIONES TEÓRICAS Y APLICABILIDAD¹

Resumen

El trabajo presenta una descripción de las principales características de la técnica de análisis espectral, sus ventajas y desventajas. Este método es utilizado para realizar descomposiciones de una serie en la totalidad de sus componentes cíclicos. El objetivo del trabajo es introducir al lector esta herramienta para que pueda aplicarla en aquellos estudios en donde esta técnica sea adecuada. Además incluye a manera de ejemplo, una aplicación, en donde se realiza un modelo de pronóstico de corto plazo de la Emisión Monetaria.

SPECTRAL ANALYSIS: GENERAL ASPECTS

Abstract

The purpose of this study is to introduce the reader, to the spectral analysis technique in order to be applied in others works, where the tool offers better results. This method is used to decompose a time series in the totality of their cyclic components and to make comparisons between two series. The work presents the main characteristics of the spectral analysis technique, highlighting its advantages and disadvantages. Also, as an example, a short run forecasting model for monetary emission is developed.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de series de tiempo se refiere al grupo de estadísticas donde las observaciones son recogidas en forma secuencial y se busca, al menos parcialmente, entender o explotar la dependencia entre esas observaciones. La principal vía a través de la cual se analizan las series de tiempo corresponde al análisis de los modelos ARIMA. Sin embargo, existen al menos otras dos grandes formas de estimación, que son: la aproximación por estado espacial² y el análisis espectral. El estudio se enfoca en éste último.

El análisis espectral descompone un conjunto de datos en términos de sus componentes cíclicos o repetitivos. Originalmente, fue aplicado a la ingeniería, donde los métodos de transformaciones de Fourier -- en que se basa el análisis espectral--, han sido aceptados; pero ahora también es ampliamente utilizado en los análisis estadísticos estándares.

En economía, el principal uso del análisis espectral es encontrar y descomponer una serie de tiempo en sus componentes cíclicos. Puede ser utilizado, ya sea para encontrar patrones de comportamiento en una misma serie o entre dos series. Como por ejemplo, se ha utilizado para encontrar evidencia de ciclos en los gastos de turistas extranjeros, realizar análisis de los componentes del gasto de un gobierno, buscar conmovimientos entre mercados accionarios y

¹ Se agradecen los comentarios de la MSc. Katia Vindas S. y el ME. Jorge Madrigal B. en la elaboración de esta nota técnica.

² Para más detalle ver Hamilton, J. (1994), pág. 372

patrones de transacciones en un mercado particular. Además, puede ser utilizado indirectamente para generar pronósticos del comportamiento de series de tiempo en donde los modelos ARIMA no generan estimaciones eficientes, modelar series de periodicidades semanales o diarias o incluso, generar indicadores adelantados para una serie.

El objetivo de este trabajo, es presentar al lector una guía sobre las características básicas de la técnica del análisis espectral que sirva de herramienta de análisis en otros estudios. En la primera sección, se describe brevemente un marco teórico sobre la técnica espectral. La segunda sección, presenta una aplicación de esta técnica, en donde se realiza un pronóstico de corto plazo de la Emisión Monetaria. Adicionalmente, se incluye un anexo, en donde se describe el procedimiento para realizar el análisis espectral utilizando el SPSS.

II. ANÁLISIS ESPECTRAL

En esencia, el método espectral descompone una serie de tiempo estacionaria³ como una suma de un conjunto de series de componentes cíclicos con propiedades específicas. Además, el análisis espectral se puede aplicar a pares de series con el fin de identificar relaciones entre ciclos de la misma serie.

Se debe considerar que este tipo de análisis nunca va a estar en contradicción con los resultados generados por los modelos ARIMA e incluso se sugiere que en el caso de que un modelo ARIMA represente adecuadamente la serie, es mejor utilizar esa técnica.

En general, al análisis espectral se le llama análisis en el dominio de frecuencia, ya que la frecuencia es una medida para representar ciclos. La frecuencia es el número de ciclos por unidad de tiempo. Así, la frecuencia de un ciclo de cuatro meses en una serie mensual, es $\frac{1}{4}$. En general, la j -ésima frecuencia es expresada como $w=j/N$, donde j es el número de veces que el ciclo se repite en la muestra y N es el número de observaciones. Por ejemplo, si el n es 6 y el total de observaciones es 24, la frecuencia es $6/24$, es decir, $\frac{1}{4}$.

Además, es importante resaltar el hecho de que el análisis espectral no depende de un modelo para generar resultados. Este analiza la serie en forma puramente matemática y no está basado en ninguna teoría acerca de los procesos que definen las series. Por esto se requiere una gran cantidad de datos para utilizar esta técnica (se recomienda al menos 100 observaciones).

³En términos generales, se dice que un proceso estocástico o aleatorio es estacionario si "su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende solamente de la distancia o rezago entre estos dos periodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza". Gujarati, Damodar. (1997), pág. 697. En el caso de que la serie no sea estacionaria, se pueden realizar transformaciones como diferenciar las series, aplicarle logaritmos o la raíz a las series. Además, si el objetivo del análisis no es determinar presencia de estacionalidad, se puede desestacionalizar la serie previamente.

A continuación se describen los aspectos básicos del análisis espectral para una serie de tiempo, los indicadores que se generan cuando se realiza un estudio para pares de series y se puntualizan las principales ventajas y desventajas del uso de esta técnica.

2.1.El Caso Univariable

La idea básica del análisis espectral es que un proceso estacionario Y_t puede ser descrito como la suma de movimientos de seno y coseno de diferente frecuencia y amplitud. La meta es determinar cuales son los ciclos de diferentes frecuencias importantes para describir el comportamiento de Y_t . Estos ciclos pueden ser de corto o largo plazo, por lo que no se realiza una descomposición de la serie en la forma usual de tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular, sino que en su lugar se descompone la serie en la totalidad de frecuencias existentes.

Si se tiene un proceso estacionario con media $E(Y_t)=\mu$ y autocovarianzas $E(Y_{t-j}-\mu)(Y_t-\mu)=\gamma_j$, y se asume que estas autocovarianzas son absolutamente sumables, la función de autocovarianzas generada se puede representar de la siguiente manera:

$$g_y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j * z^j \quad (1)$$

donde z es un escalar complejo. Si la expresión anterior se divide entre 2π y se evalúa para $z=e-iw$ donde $i=\sqrt{-1}$ y w es un escalar real; es decir, se realiza una transformación de Fourier, el resultado es llamado el espectro poblacional de Y :

$$s_y(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j e^{-ijw} \quad (2)$$

si adicionalmente, se utilizan algunos resultados trigonométricos y teoremas, el espectro poblacional se puede reescribir como⁴:

$$s_y(w) = \frac{1}{2\pi} \left[g_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} g_j \cos(wj) \right] \quad (3)$$

Esta es la representación espectral de la serie en el dominio de frecuencia e indica que la serie es igual a la suma de su promedio más la suma de un conjunto autocovarianzas de ciclos con frecuencias wj . Además, al emplear otras propiedades matemáticas se puede probar que el área bajo el espectro de población entre $\pm\pi$ es la varianza de la serie Y_t . Esta representación espectral se puede visualizar a través de un gráfico al que se le llama periodograma⁵.

⁴ Para detalles sobre el desarrollo matemático del análisis espectral ver Hamilton, J (1994), págs. 152-179 ó en forma extensa en Priestley, M. (1981), Vol. I y II.

⁵ Ver pág. 7

La estimación empírica del espectro poblacional a partir de una muestra finita es conocida como análisis espectral. Para ello, debe considerarse que para una muestra de tamaño T, el ciclo más amplio que puede ser detectado en los datos es una frecuencia que completa un ciclo en toda la extensión de la serie. Además el período más corto que se puede considerar o la frecuencia más alta es de 2 meses (asumiendo datos mensuales). La totalidad de frecuencias que se pueden observar son tantas como la mitad del número de observaciones. Por ejemplo, si se tienen 100 observaciones, no se pueden observar más de 50 frecuencias diferentes.

Existe un teorema adicional que permite trasladar la representación espectral de una serie a una representación en el dominio de tiempo en donde el valor de y para una fecha t puede ser expresado como:

$$y_t = \hat{m}_t + \sum_{j=1}^M \{ \mathbf{a}_j \cdot \cos[w_j(t-1)] + \mathbf{d}_j \cdot \text{sen}[w_j(t-1)] \} \quad (4)$$

en donde w_j es igual a $2\pi F$, F es la frecuencia y el valor M es $((T-1)/2)$. Los parámetros α y δ pueden ser estimados mediante una regresión lineal. Adicionalmente, se puede probar que las variables exógenas son linealmente independientes y si se incluyen todas las frecuencias, se puede obtener una regresión que se ajusta perfectamente.

La estimación espectral del espectro poblacional es un estimador insesgado de dicho espectro, pero es inconsistente. Esto porque la varianza de los estimadores no tienden a cero cuando el número de datos se incrementa y el número de parámetros a ser estimados es igual al número de observaciones. Para evitar éste problema, se utilizan unos estimadores conocidos como kernel, en donde se realiza una estimación llamada "densidad espectral". Esta estimación es un promedio ponderado de los puntos vecinos del análisis espectral. Este acercamiento asume que $s_y(w)$ es cercano a $s_y(\lambda)$ cuando las frecuencias w y λ se encuentran cerca entre sí. El estimador de kernel del espectro a una frecuencia w_j es un promedio ponderado de los ciclos muestrales a frecuencias cerca de w_j , donde la suma ponderada es igual a uno⁶.

Sin embargo, esa operación necesariamente introduce cierta pérdida de información en el procedimiento de su estimación. Existen estudios teóricos que se enfocan en determinar la cantidad de ciclos de frecuencias cercanas que se deben agrupar para obtener un equilibrio

⁶ Esto se puede representar como:

$$s_y(w) = \sum_{b=-h}^h k(w_{j+b}, w_j) s_y(w_{j+b})$$

donde

$$\sum_{b=-h}^h k(w_{j+b}, w_j) = 1$$

Aquí, b es un parámetro de agrupamiento que indica el número de frecuencias utilizadas en la estimación del espectro a w_j .

óptimo entre varianza y sesgo. En la práctica, esto usualmente significa que existe cierto elemento subjetivo a ser desarrollado.

Para sustentar estadísticamente los resultados obtenidos del análisis espectral se pueden estimar límites de confianza (ver anexo N°3 para detalles más completos).

Un último aspecto que debe considerarse sobre el análisis espectral, es que existen una serie de filtros que permiten aplicaciones específicas. Como por ejemplo, el ajuste estacional de Sims, que sólo puede ser representado en el dominio de frecuencia y el filtro de la Eficiencia de Hannan, que es un procedimiento para corrección de correlación serial. Adicionalmente, el método de análisis espectral puede ser utilizado para pronosticar series de tiempo univariadas en forma automática con algunos paquetes econométricos⁷.

2.2.El Caso Bivariado o Análisis Espectral Cruzado⁸

El análisis espectral puede ser ampliado al estudio de dos series de tiempo simultáneamente, de forma que se pueda analizar la interacción existente. Relaciona los componentes o bandas frecuenciales con el fin de obtener el grado de “asociación” entre ellas.

En razón de que este método relaciona pares de series de tiempo, es posible obtener estadísticos análogos a los que se derivan del análisis de regresión y correlación. El espectro cruzado, $s_{xy}(w)$, es utilizado cuando se quiere determinar las relaciones entre dos variables estacionarias. Este es definido como la transformación de Fourier de la función de covarianza cruzada, $y_{xy}(k)$. En general el espectro cruzado es complejo, su parte real es llamada el co-espectro $c(w)$ y su parte imaginaria es llamada el espectro cuadrado $q(w)$. Estas funciones son difíciles de interpretar y por ello es usual enfocarse sobre otras funciones derivadas de ellas. La práctica general es caracterizar el espectro cruzado por medio de tres estadísticos:

- **Coherencia:** Esta cantidad mide el cuadrado de la correlación lineal entre dos variables para una frecuencia dada w y es análoga al cuadrado del coeficiente de correlación. Este se encuentra entre 0 y 1, por lo que si la coherencia es cercana a uno para una frecuencia w dada, significa que los componentes de las dos series están altamente relacionados, pero un valor cercano a cero significa que no están relacionados.
- **Desplazamiento de fase:** Es una medida de la diferencia de fase entre los componentes de frecuencia de dos procesos. Aproxima el número de unidades de tiempo (meses) que separan los picos (o valles) del componente periódico de una serie con su similar en la otra serie, es decir, brinda una estimación del adelanto o rezago medio de una serie respecto a la otra en cada banda frecuencial.
- **Ganancia:** Registra el escalar por el cual la amplitud de una serie en cada frecuencia debe ser multiplicada para reproducir el componente de la amplitud a la cual esta

⁷ Manual de Rats. (1996), págs. 11-9 a 11-12.

⁸ Granger, C. (1964), págs 77-79.

frecuencia aparece en la serie cruzada, por tanto es análogo a la pendiente en el análisis de regresión.

Este conjunto de estadísticos provee las herramientas necesarias para estudiar el grado de asociación y la relación en el tiempo entre cualquier par de series.

2.3.Ventajas y Desventajas del Análisis Espectral

2.3.1.Las principales ventajas que posee esta técnica son:

- Permite manejar la combinación de regularidad y aleatoriedad típicamente encontrada en las series de tiempo económicas. Esto significa que no es necesario eliminar los componentes irregular y estacional de las series para estudiar su comportamiento.
- Analiza relaciones económicas con más detalle de lo que los métodos tradicionales de construcción de modelos econométricos son capaces⁹. Esto porque permite a los datos “hablar por sí mismos” y no existe el riesgo de subespecificación del modelo. Describe las fluctuaciones de los ciclos económicos de una serie de tiempo en forma más correcta, por cuanto considera todo el comportamiento histórico de la serie en estudio y no sólo sus picos y valles. Es un método matemáticamente más riguroso y general que los modelos ARIMA, dado que examina con mayor flexibilidad la descomposición de una variable en sus componentes. Es una forma natural y potencialmente más poderosa de seleccionar un indicador representativo del fenómeno en estudio¹⁰.
- Puede utilizarse para series con cualquier tipo de periodicidad.

2.3.2.Las desventajas son:

- Las series de tiempo deben ser estacionarias. Transformar una serie puede alterar el espectro de la serie básica. Por ejemplo, un promedio móvil simple, comúnmente utilizado en el dominio de tiempo para reducir las variaciones de alta frecuencia (baja periodicidad o ciclos de largo plazo), es un filtro de “transmisión de baja banda¹¹” que magnifica el espectro de la serie señalada a bajas frecuencias y contrae el espectro a altas frecuencias. Tomar la primera diferencia de la serie es un filtro “transmisión de alta banda¹²” que filtra la mayoría de las variaciones de baja frecuencia y magnifica la variación de alta frecuencia (de hecho, para una serie estacionaria, la primera diferencia elimina completamente la contribución a la varianza para la frecuencia de cero, sin embargo, este no es el caso para series no estacionarias). Estos dos filtros no son “ideales” en el sentido que ellos no eliminan la variación a una banda específica de frecuencia.

⁹ Pacheco, R y Ordoñez R. (1995), pág. 21.

¹⁰ Ibid, pág. 22.

¹¹ En inglés *low-band-pass*

¹² En inglés *high-band-pass*

- Utiliza únicamente las frecuencias de Fourier, que son aquellas que contienen un número completo de ciclos desde la primera hasta la última observación. Por ello, las frecuencias particulares utilizadas dependen de la extensión de las series y es enteramente posible que un ciclo importante en los datos no sea tomado en el análisis. Si se conoce la existencia de la periodicidad de la serie y se quiere mostrar claramente, entonces la extensión de la serie debe ser un múltiplo de esa periodicidad
- El método espectral requiere más datos (sobre 100 observaciones) que otras técnicas, debido a que no utiliza la muestra en forma eficiente.
- Es un modelo atóxico, en el sentido de que no responde a alguna teoría económica.

III.EJEMPLO DE APLICACIÓN DE ANÁLISIS ESPECTRAL: PRONÓSTICO DE CORTO PLAZO DE LA EMISIÓN MONETARIA

En esta sección se aplica el método espectral, como ejercicio teórico, a la serie de datos semanales de la Emisión Monetaria (EMI) y se mide su capacidad de pronóstico. La serie utilizada corresponde a los datos semanales que van del 5 de enero de 1990 al 31 de diciembre de 1999¹³.

Además, el análisis espectral se compara con otra herramienta que se podría utilizar para pronosticar series semanales en la forma tradicional de estimación. Esto es, por agregación de tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular. Actualmente, se estiman los coeficientes de estacionalidad semanal, pero no el componente de tendencia o ciclo, por lo que se va a suponer que se pueden predecir exactamente esos agregados.

3.1.Procedimiento y Resultados

3.1.1.Estacionariedad de la serie:

Primero se determina si existe estacionariedad. En este caso no existía, por lo que fue necesario calcular el logaritmo de la serie y obtener sus diferencias.

3.1.2.Estimación del espectro y determinación de los valores relevantes:

La descomposición de la serie por frecuencias, se obtiene aplicando el programa SPSS, como es explicado en el anexo 1. Esta representación se puede ver gráficamente con el periodograma. Este muestra la importancia de cada frecuencia de Fourier en la representación de la serie. Se puede graficar por período o por frecuencia y el eje vertical es la suma de los cuadrados del seno y coseno, por lo que los datos de mayor valor son las frecuencias más representativas de la serie. En este caso, el periodograma muestra que el logaritmo natural de

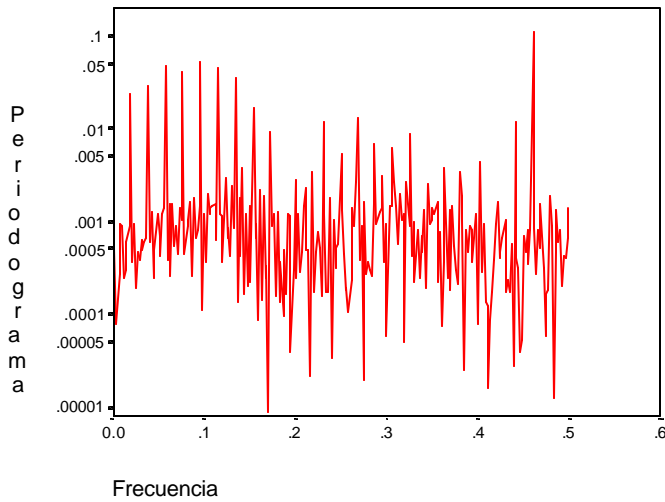
¹³ La última actualización de la metodología de factores estacionales se encuentran en DIE-008-2000.

la Emisión Monetaria (LEMI) está altamente influenciado por ciclos de periodicidades menores a cincuenta y dos semanas (ver gráficos 1 y 2).

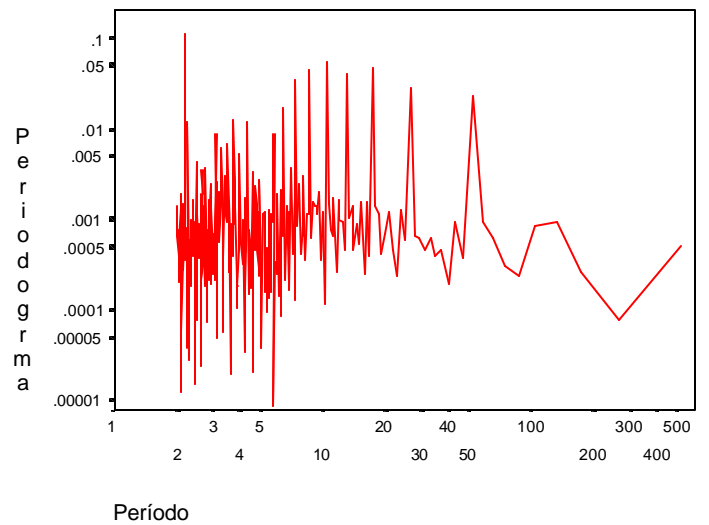
Una vez estimado el espectro, se toman las frecuencias que presentan mayores valores en el periodograma, para utilizarlos en el siguiente paso.

**PERIODOGRAMAS DEL LOGARITMO DE LA EMISIÓN MONETARIA
DIFERENCIADO UNA VEZ (DLEMI) POR FRECUENCIAS Y POR PERÍODOS**

**Gráfico N°1
Periodograma de DLEMI**



**Gráfico N°2
Periodograma de DLEMI**



Fuente: Elaboración propia

Una vez obtenido el gráfico espectral, se seleccionan las frecuencias significativas. En este caso se usó como criterio, escoger aquellas frecuencias cuyo valor en el periodograma es mayor a 0.002.

En el siguiente cuadro, se muestran esas frecuencias.

Cuadro N°1	
Frecuencias seleccionadas	
Frecuencia	Periodicidad
0.01916	52.20000
0.03831	26.10000
0.05747	17.40000
0.07663	13.05000
0.09579	10.44000
0.11494	8.70000
0.13410	7.45714
0.15326	6.52500
0.17241	5.80000
0.22989	4.35000
0.24904	4.01538
0.26820	3.72857
0.28736	3.48000
0.30651	3.26250
0.32567	3.07059
0.40230	2.48571
0.44061	2.26957
0.45977	2.17500

Fuente: Elaboración propia

3.1.3. Transformación del espectro del dominio de frecuencia al dominio de tiempo:

Este paso consiste en trasladar los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia al dominio de tiempo. Esto se realizó estimando un modelo de ecuación lineal con la función expresada en la ecuación (4).

En este caso la variable dependiente es LEMI y las independientes, la suma de senos y cosenos de las periodicidades seleccionadas en el punto anterior. En donde w_j es igual a $2\pi F$, F son las frecuencias escogidas y n es el número de observación. En el cuadro N°2 se resumen los resultados de la regresión.

Cuadro N°2			
Resultados del ajuste de regresión			
Variable	Coficiente	Estadístico T	Pro.
Constante	0.003872	4.999946	0.0000
A ¹	0.183750	10.53913	0.0000
B ²	-0.129337	-7.419120	0.0000
SEN(0.12037*(n-1))	-0.008605	-7.876867	0.0000
SEN(0.24074*(n-1))	-0.010181	-9.306975	0.0000
SEN(0.36110*(n-1))	-0.009847	-8.998493	0.0000
SEN(0.48147*(n-1))	-0.006717	-6.144911	0.0000
SEN(0.60184*(n-1))	-0.002205	-2.018827	0.0441
SEN(0.72221*(n-1))	0.003440	3.147823	0.0018
SEN(0.84257*(n-1))	0.005717	5.222884	0.0000
SEN(0.96290*(n-1))	0.005071	4.629887	0.0000
SEN(1.0833*(n-1))	0.006657	6.082217	0.0000
SEN(1.4444*(n-1))	-0.004410	-4.026419	0.0001
SEN(1.5647*(n-1))	-0.003767	-3.436006	0.0006
SEN(1.6851*(n-1))	-0.003633	-3.315594	0.0010
SEN(1.8055*(n-1))	-0.001715	-1.566972	0.1179
SEN(1.9258*(n-1))	0.000948	0.866881	0.3865
SEN(2.0462*(n-1))	0.001933	1.764986	0.0783
SEN(2.5277*(n-1))	-0.003761	-3.440548	0.0006
SEN(2.7684*(n-1))	-0.004630	-4.231090	0.0000
SEN(2.8888*(n-1))	-0.014890	-13.61853	0.0000
COS(0.1203*(n-1))	0.002799	2.549168	0.0111
COS(0.2407*(n-1))	-0.003409	-3.108646	0.0020
COS(0.3611*(n-1))	-0.010466	-9.547420	0.0000
COS(0.4814*(n-1))	-0.011526	-10.50383	0.0000
COS(0.6018*(n-1))	-0.015339	-13.96738	0.0000
COS(0.7222*(n-1))	-0.014348	-13.07221	0.0000
COS(0.8425*(n-1))	-0.011408	-10.40994	0.0000
COS(0.9629*(n-1))	-0.007365	-6.725583	0.0000
COS(1.083*(n-1))	-0.000751	-0.685654	0.4933
COS(1.444*(n-1))	0.005242	4.786874	0.0000
COS(1.564*(n-1))	-0.002235	-2.042933	0.0417
COS(1.685*(n-1))	-0.006254	-5.712859	0.0000
COS(1.805*(n-1))	-0.005000	-4.561581	0.0000
COS(1.925*(n-1))	-0.005195	-4.738016	0.0000
COS(2.046*(n-1))	-0.006238	-5.695824	0.0000
COS(2.527*(n-1))	-0.000791	-0.720713	0.4715
COS(2.768*(n-1))	0.004593	4.190903	0.0000
COS(2.888*(n-1))	-0.015468	-14.10002	0.0000

¹variable dummy agregada debido al comportamiento de la serie el 12 de diciembre de 1994

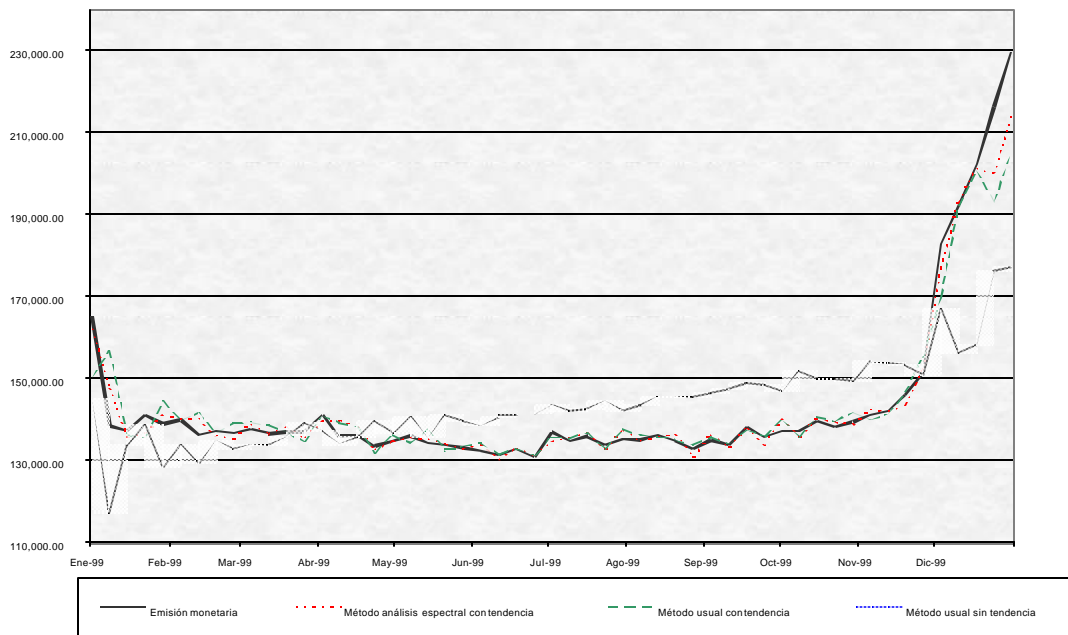
²variable dummy agregada debido al comportamiento de la serie el 6 de enero de 1995

Fuente: Elaboración propia

La regresión ajustada tiene un error estándar de regresión de 1.6% y un error cuadrático medio de 12%. El R2 ajustado fue de 0.77, sin embargo, debe recordarse que éste no es un buen estimador cuando existen valores rezagados de la variable dependiente, ya que su valor cambia dependiendo del filtro que se aplique y en este caso, se utiliza la diferencia de los logaritmos de la serie¹⁴.

En el siguiente gráfico se presenta una comparación entre la serie observada (EMI) y el ajuste estimado con la técnica espectral (AEct) para el año de 1999. También se incluyen dos series más que corresponden al ajuste de la tendencia según el método de Hodrick-Prescott (SCst) y la serie que se obtendría de sumar una estimación de los factores estacionales y la tendencia. De aquí se puede observar que la tendencia tiende a crecer en el tiempo, pero presenta un patrón fluctuante.

Gráfico N°3
Comparación de ajustes para 1999



¹⁴ Pierce, D. (1979), pág. 901.

3.2. Evaluación de la Capacidad de Pronóstico del Modelo

La capacidad de pronóstico del modelo, se midió calculando el error cuadrático medio para varios períodos fuera de la muestra. La muestra seleccionada fue de enero de 1990 a diciembre de 1998, con el fin de utilizar los datos observados en 1999 como parámetro de comparación. Además, se calculó el error cuadrático medio¹⁵ que se obtiene de pronosticar el comportamiento de la serie mediante la metodología tradicional.

Como fue mencionado anteriormente, la metodología tradicional descompone la serie en tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular. Actualmente, la estacionalidad es calculada de la siguiente manera: primero se elimina la tendencia de la serie original con el filtro de Holdick-Prescott, se seleccionan las variables en forma manual, en donde se escogen aquellos ciclos cuyo estadístico t es significativo y luego se calculan los componentes estacionales como una suma de funciones seno y coseno ajustadas de acuerdo a la semana o día el mes en que se encuentre el dato¹⁶. El componente de tendencia-ciclo utilizado en este estudio son los valores reales observados de la tendencia para 1999. Es decir, se supone que se puede predecir exactamente el comportamiento de la tendencia.

En el gráfico N°4 se pueden observar los resultados pronosticados para 1999¹⁷ con las dos técnicas y los valores reales. De aquí es inmediato ver, que para los primeros tres meses de pronóstico (aproximadamente doce semanas) el análisis espectral es eficiente. Sin embargo, a medida que el período de estimación se incrementa, el pronóstico tiende a sobrestimar la serie en forma creciente. Esto es debido a que el periodograma es un estimador inconsistente del espectro (la varianza de los estimadores no tiende a cero cuando el número de datos se incrementa). Los mismos resultados se presentarían si se realiza todo el ejercicio con datos hasta diciembre de 1997 o marzo de 1999 y pronostica para el resto de 1999.

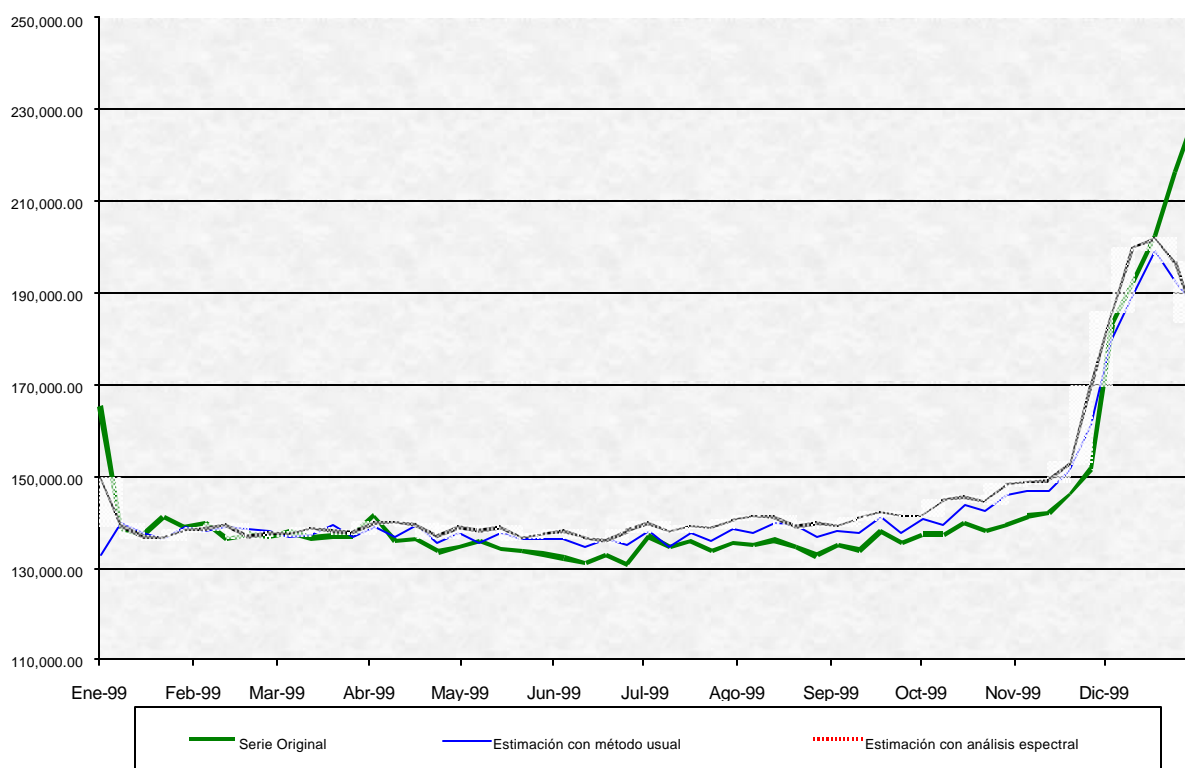
¹⁵ Según Kikut, A y Mayorga, M. (1995), pág. 37, el error cuadrático medio se calcula con base en la siguiente fórmula:

$$\frac{\sqrt{\sum e_n^2 / n}}{\sum y_n / n} * 100, \text{ donde } e_n \text{ es el residuo entre el valor proyectado y el observado para la semana } n \text{ y } y_n \text{ es el valor observado de la variable dependiente a estimar en el trimestre } n.$$

¹⁶ Explicada ampliamente en Muñoz, E. (1997).

¹⁷ En el anexo # 2 se encuentra los valores de los coeficientes utilizados con cada uno de las técnicas

Gráfico N°4
Pronóstico para 1999 con las dos metodologías



En el cuadro N°3 se encuentran los errores medios de pronóstico aplicando la metodología tradicional (SC) y el análisis espectral (AE) para un año y descompuesto por trimestres (doce semanas) fuera de la muestra. En la segunda y tercera columnas, se incluyen todos los elementos del pronóstico. En la cuarta y quinta columnas se excluyen tres valores de pronóstico extremos. Esto debido a que cada uno representa más de un 10% de la suma de los errores al cuadrado y que corresponden a la primera y dos últimas semanas del año.

En este cuadro se puede notar como los errores son relativamente bajos con cualquiera de los dos procedimientos si el pronóstico se realiza para el total de 1999. Si se realiza para las primeras doce semanas del año el error cuadrático medio es menor utilizando el método de análisis espectral. Sin embargo, el pronóstico para los siguientes trimestres es más exacto utilizando el método tradicional.

Cuadro N°3
Resultados del error cuadrático medio de pronóstico

	Todos los valores		Sin valores extremos ¹	
	SC	AE	SC	AE
Total 1999	6.09	6.14	2.20	3.44
1er trimestre	6.59	3.38	1.29	1.25
2do trimestre	2.21	3.17		
3er trimestre	2.20	3.72		
4to trimestre	8.52	9.33	2.56	4.17

¹Se excluyeron tres valores extremos de la serie (primer, penúltimo y último datos).

Fuente: Elaboración propia.

De estos resultados, se puede concluir que el método de AE es bueno para realizar pronósticos para pocos períodos fuera de la muestra. Por lo que sería necesario realizar estimaciones cada tres o cuatro meses si se quiere generar estimaciones semanales vía análisis espectral¹⁸. Por otra parte, si la tendencia de la serie de la emisión monetaria puede ser pronosticada perfectamente, como se supone en este ejercicio, el método actual vía factores estacionales es adecuado para realizar pronósticos para 52 semanas fuera de la serie. Aunque se debe recordar que existen tres valores extremos que afectan en mayor grado al pronóstico con el método tradicional.

Finalmente, si lo que se quiere obtener es únicamente los factores estacionales semanales, el método actual es más eficiente, ya que captura con pocas variables los efectos de los movimientos entre semanas y la ubicación de éstas dentro del año. En cambio, con el método de análisis espectral, debido a que la posición de los días en las semanas y años varía, se requiere una gran cantidad de variables para estimar comportamientos estacionales, definidos como aquellos de periodicidad menor a un año.

IV. CONSIDERACIONES FINALES

La finalidad de este documento es servir como base para difundir las principales características de la técnica de análisis espectral, con el objetivo de que ésta sea considerada en la elaboración de estudios en los que comportamientos cíclicos o repetitivos sean relevantes.

¹⁸ No obstante, se debe hacer la observación de que en realidad existen programas econométricos a través de los cuales se pueden hacer pronósticos por medio de la densidad espectral, con lo que se evitaría el problema de insesgamiento y se podría pronosticar para mayores períodos de tiempo.

Al igual que otras técnicas, el análisis espectral tiene ventajas y desventajas que deben ser consideradas en el momento de decidir aplicar este instrumento. Las principales ventajas son: no es necesario descomponer una serie en tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular, permite analizar relaciones económicas con más detalle y las relaciones entre dos series para cada frecuencia específica y puede ser utilizada para series con cualquier tipo de periodicidad. Por otro lado, las desventajas son: requiere una gran cantidad de observaciones, es un modelo ateorico y sólo puede ser aplicado a series estacionarias.

El análisis espectral puede ser utilizado para pronosticar series con cualquier tipo de periodicidad, lo cual representa una gran ventaja con respecto a los modelos ARIMA, ya que éstos sólo pueden ser utilizados con series de periodicidad mayor o igual a la mensual.

Del ejemplo presentado en la segunda sección, en donde se aplicó tanto el análisis espectral como el método tradicional a la serie semanal de la Emisión Monetaria, se obtuvo que el método de análisis espectral genera mejores predicciones que el método tradicional para periodos cortos de pronóstico.

V.BIBLIOGRAFÍA

Cohen, D. "An Analysis of Government Spendig in the Frequency Domain". Federal Reserve System. Mayo, 1999.

Granger, C. Spectral Analysis of Economic Time Series. 3era ed. Estados Unidos: Princeton University Press, 1964.

Hamilton, J. Time Series Analysis. Princeton University Press: Estados Unidos. 1994.

Kikut, A y Mayorga, M. "La hipótesis de cointegración y la estabilidad de la demanda por medio circulante en Costa Rica". En Serie "Comentarios sobre asuntos económicos" del Banco Central de Costa Rica, N. 140, julio, 1995.

Kikut, A. y Vindas, K. "Actualización de los coeficientes de estacionalidad semanal de la emisión monetaria". DIE-EC-01-98.

Muñoz, E. "Uso de los coeficientes de estacionalidad semanal para estimar el saldo de la emisión monetaria. Propuesta metodológica". DIE-EC-06-97.

Pacheco, R y Ordoñez, R. "Construcción de un indicador adelantado a partir del Método Espectral. El caso de la inflación en Costa Rica 1978-1993". En Serie Comentarios sobre asuntos económicos, No 139, Costa Rica: Banco Central de Costa Rica. 1995, págs. 13-17.

Pierce, D. "R2 Measures for time Series". En Journal of the American Statistical Association. EEUU. Vol. 74, no 368. Dic. 1979.

Priestley, M. Spectral Analysis and Time Series. Academic Press, Inc: Estados Unidos, Vol. I y II, 1981.

Smith, R. "Time Series". Department of Statistics. University of Nort Carolina. EEUU. Mayo, 1999.

gonzalezgd@bccr.fi.cr

F:\...\NOTAS TÉCNICAS\NT2000\NT-02-2000.DOC

ANEXOS

ANEXO N°1

Procedimiento para realizar el análisis espectral utilizando el SPSS

El análisis espectral se puede realizar en el SPSS señalando las opciones:

Gráficos

Series de tiempo

Espectral: la ventana que aparece es:



Análisis univariable:

Si se quiere realizar un análisis univariable, se pueden obtener gráficos del periodograma y de la densidad espectral.

Periodograma: El periodograma de una serie muestra la energía o varianza para cada una de las frecuencias de Fourier. Para producir un periodograma se mueve la variable a la lista de variables. Las variables utilizadas en este procedimiento no deben tener ningún dato perdido. En el periodograma el eje horizontal muestra las frecuencias en el que se ha descompuesto las series y el eje vertical muestra el peso relativo, o importancia de cada frecuencia. El valor del eje vertical mostrado en el periodograma es la suma de los cuadrados de los pesos (seno y coseno) para esa frecuencia. El periodograma es graficado en escala logarítmica, lo que permite ver los detalles con mayor claridad. También, debido a que el espectro es simétrico sobre la frecuencia de cero, es común graficar $s(w)$ sobre w sólo para $0 < w < \pi$.

Densidad espectral: El problema con el periodograma es que los términos individuales del periodograma tienen grandes varianzas y son estadísticamente independientes. Por ello, se pueden realizar gráficos de densidad espectral, que es el periodograma suavizando con alguna ventana (lo que conlleva cierto costo en resolución y sesgo). Esto se puede hacer, definiendo una ventana y escogiendo la forma y el número de términos del grupo de puntos vecinos que

son promediados juntos. La ventana que se escoge se refiere al patrón de los pesos aplicados al construir el promedio móvil. Estos pesos son usualmente simétricos alrededor del punto medio. El mayor peso se da al punto medio y los pesos caen para puntos más lejanos, excepto para la ventana Daniell, donde ellos son constantes.

Los parámetros de agrupamiento indican el número de puntos incluidos en el promedio móvil. Una ventana de muchos datos reduce el efecto de variación aleatoria en el periodograma. Sin embargo, agrupamientos amplios pueden generar pérdidas de información importante. Por ello, lo más adecuado sería utilizar grupos que representen entre un 10% y un 20% de la muestra utilizada. Los grupos deben ser enteros positivos impares. Las ventanas más utilizadas son Tukey y Tukey-Hamming, en tanto que Bartlett ha caído en desuso.

Las fórmulas utilizadas para determinar las ponderaciones van a depender del tipo de ventana. El programa SPSS, tiene disponibles las siguientes ventanas¹⁹:

- ◆ Tukel-Hamming
- ◆ Tukey
- ◆ Parzen
- ◆ Bartlet
- ◆ Daniell (unitario), todos los valores del conjunto son valorados de la misma forma
- ◆ Ninguno: Es equivalente a obtener el periodograma

Tanto el periodograma como la densidad espectral pueden ser graficados por frecuencia o por período, que es el recíproco de la frecuencia (período = 1/frecuencia).

Otra opción que debe ser tomada en cuenta es la de “centrar variables”. Si está seleccionada, ajusta las series para tener una media de cero antes de calcular el espectro y remueve los movimientos de largo plazo que pueden estar asociados con el promedio de las series.

Análisis bivariable:

En el análisis bivariable, siempre la primera variable es comparada con cada una de las otras variables de la lista. Es decir, la primera serie se trata como la variable independiente y el resto de las variables se tratan como variables dependientes. La caja de gráficos²⁰ muestra para cada diferente frecuencia los siguientes valores:

- ◆ Coherencia cuadrada
- ◆ Densidad cospectral
- ◆ Espectro cuadrado
- ◆ Espectro de fase
- ◆ Amplitud cruzada
- ◆ Ganancia

¹⁹ Para mayor información sobre las ventanas ver: Priestley, M. (1981).

²⁰ Ver más detalles en el manual del SPSS 6.1 Trends (1994).

Con estas opciones se generan todos los resultados gráficos, pero no se obtienen los datos utilizados en los gráficos generados. Para guardar estas variables en el archivo de datos y poderlas utilizar en análisis subsecuentes, se debe utilizar el subcomando SAVE. Para ello, antes de ejecutar el análisis se debe elegir en el menú:

Edición

Opciones

Guardar comandos

Luego se debe ejecutar el análisis y en el archivo de sintaxis se copian los comandos y al final se le agrega la opción "/SAVE =" y se obtienen los datos que se quieren. Por ejemplo, en el caso de que se quieran los datos de períodos de Fourier, valores de la función coseno para cada frecuencia de Fourier, valores del periodograma, valores estimados de la densidad espectral, valores estimados del espectro de fase, valores de ganancia y valores de la coherencia cuadrada, se debe ejecutar:

/SAVE = PER (Períodos) COS (coseno) P (periodograma) S (espectral) PH (fase) G (ganancia)
K (coherencia2)

ANEXO N°2

Valores de los coeficientes estimados con datos de 1990 a 1998

a. Técnica de factores de estacionalidad

Variable	Coeficiente	Estadístico T
C1A	0.067257	15.23441
C2A	0.041345	11.05683
C3A	0.029038	9.383907
C4A	0.016335	6.278284
C5A	0.008673	3.951585
C6A	0.000138	0.072791
C7A	-0.002595	-1.550095
C8A	-0.002372	-1.582023
C9A	-0.005493	-4.037310
C13A	0.002508	2.471381
C14A	0.003873	4.028653
C2M	0.009777	13.29536
C4M	-0.003486	-1.434363
S1A	0.024364	5.533944
S2A	-0.010258	-2.744888
S3A	-0.024252	-7.841643
S4A	-0.019860	-7.651739
S5A	-0.023190	-10.55093
S6A	-0.019755	-10.38388
S7A	-0.014566	-8.680875
S8A	-0.008877	-5.907505
S9A	-0.002880	-2.112696
S13A	2.07E-05	0.020329
S14A	-0.002017	-2.096631
S2M	0.004444	6.106754
S4M	-0.001106	-0.462259
AR(1)	0.734179	22.65488

El R2 ajustado fue de 0.938, el error estándar de la regresión 1.9% y la suma de los residuos al cuadrado de 1.63%.

b. Técnica de análisis espectral

Variable	Coefficiente	Estadístico T
A	0.168531	8.659523
B	-0.104162	-5.352077
C	0.003891	4.501644
COS(2.880351473*(n-1))	-0.002081	-1.703561
COS(0.602864262*(n-1))	-0.014156	-11.55914
COS(0.723437114*(n-1))	-0.014747	-12.03950
COS(0.361718557*(n-1))	-0.008623	-7.055021
COS(0.48229141*(n-1))	-0.009705	-7.933801
COS(0.844009967*(n-1))	-0.012734	-10.40654
COS(0.241145705*(n-1))	-0.002261	-1.848624
COS(0.120572852*(n-1))	0.003291	2.688076
COS(0.964582819*(n-1))	-0.008858	-7.247629
COS(1.085155671*(n-1))	-0.003788	-3.099784
COS(2.759778621*(n-1))	-0.003389	-2.770513
COS(2.893748457*(n-1))	0.005788	4.737774
COS(1.446874229*(n-1))	0.006569	5.367545
COS(1.942562622*(n-1))	-0.003844	-3.148209
COS(1.688019933*(n-1))	-0.001590	-1.301959
COS(1.848783736*(n-1))	-0.000632	-0.517648
COS(2.022944523*(n-1))	0.002833	2.313825
SIN(2.880351473*(n-1))	0.010223	8.357453
SIN(0.602864262*(n-1))	-0.005980	-4.900703
SIN(0.723437114*(n-1))	-0.000857	-0.702136
SIN(0.361718557*(n-1))	-0.011153	-9.123794
SIN(0.48229141*(n-1))	-0.008804	-7.207305
SIN(0.844009967*(n-1))	0.001374	1.125297
SIN(0.241145705*(n-1))	-0.010301	-8.430527
SIN(0.120572852*(n-1))	-0.008365	-6.854969
SIN(0.964582819*(n-1))	0.001994	1.631363
SIN(1.085155671*(n-1))	0.005759	4.709968
SIN(2.759778621*(n-1))	0.000593	0.485078
SIN(2.893748457*(n-1))	-0.016946	-13.85478
SIN(1.446874229*(n-1))	-0.000237	-0.194082
SIN(1.942562622*(n-1))	-8.65E-05	-0.070663
SIN(1.688019933*(n-1))	-0.006806	-5.561837
SIN(1.848783736*(n-1))	-0.003141	-2.565240
SIN(2.022944523*(n-1))	0.001090	0.893272
COS(2.170311343(n-1))	-0.000719	-0.587873
SIN(2.170311343*(n-1))	-0.004084	-3.341855

El R2 ajustado fue de 0.72, el error estándar de la regresión 1.86% y la suma de los residuos al cuadrado de 1.49%.

ANEXO N°3

Estimación de los límites de confianza del espectro

El intervalo de confianza se puede estimar de la siguiente forma:²¹ “Si se representa el espectro verdadero como $\Phi(w_j)$, donde w es la frecuencia multiplicada por 2π , y el espectro estimado a partir de la muestra como $f(w_j)$, entonces la distribución de $f(w_j)/\Phi(w_j)$ es aproximadamente una χ^2_{2k}/k con $k=2n/m$ grados de libertad, donde: n es el número de observaciones, m es el número de bandas frecuenciales (número de datos/tamaño de banda escogida) utilizados en la estimación del espectro”. A partir de esta distribución, es posible construir un intervalo de confianza de $(100-\alpha)$ por ciento para cada frecuencia del espectro $\Phi(w_j)$ de la siguiente forma:

$$\Pr\left(\frac{f(w_j)}{c_{\alpha/2,k}^2/k} < \Phi(w_j) < \frac{f(w_j)}{c_{100-(\alpha/2),k}^2/k}\right) = (100 - \alpha)\%$$

Si el valor espectral en cada frecuencia se encuentra dentro de estos límites de confianza, no se rechaza la hipótesis de que el espectro basado en la muestra en esa frecuencia particular sea verdadero.

²¹ Pacheco, R y Ordoñez, R. (1995), pág. 27.